

Exercice 1 (3 points)

1. Pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$

Et comme n est positif : $2n + 3 > 0$

C'est-à-dire : $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

2. a. On considère la propriété \wp définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\wp(n) : u_n > n^2$$

- On a $u_0 = 1$ et $0^2 = 0$ d'où $\wp(0)$. La propriété \wp est initialisée au rang 0.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n) : u_n > n^2$

En ajoutant $2n + 3$: $u_{n+1} > n^2 + 2n + 3 > n^2 + 2n + 1$

Or : $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$

D'où : $u_{n+1} > (n + 1)^2$

Ce qui est $\wp(n + 1)$.

La propriété \wp est héréditaire à partir du rang 0.

On a montré que la propriété \wp est initialisée au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0.

Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit qu'elle est vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$.

Donc, pour tout entier naturel n , on a bien : $u_n > n^2$

b. On sait que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

Donc, par comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

3. Calculons les premiers termes de la suite (u_n) : $u_0 = 1$

$$u_1 = u_0 + 3 = 4$$

$$u_2 = u_1 + 5 = 9$$

$$u_3 = u_2 + 7 = 16$$

$$u_4 = u_3 + 9 = 25$$

On peut conjecturer que pour tout entier naturel n :

$$u_n = (n + 1)^2$$

Démontrons-le par récurrence en considérant la propriété Q définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$Q(n) : u_n = (n + 1)^2$$

- La propriété Q est initialisée au rang 0 puisque $u_0 = 1$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $Q(n) : u_n = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$

En ajoutant $2n + 3$, cela donne : $u_{n+1} = n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$

Ce qui est $Q(n + 1)$.

On a montré que la propriété Q est initialisée au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0.

Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit qu'elle est vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$.

Donc, pour tout entier naturel n , on a bien : $u_n = (n + 1)^2$

Exercice 2 (5 points)

1. En remarquant que $(1 + i)^2 = 2i$, on a : $(1 + i)^6 = (2i)^3 = -8i$

2. Équation : $(E) : z^2 = -8i$

a. Posons : $z_0 = (1 + i)^3 = -2 + 2i$

Ainsi, d'après la question 1 : $z_0^2 = (1 + i)^6 = -8i$

Le nombre complexe $z_0 = (1 + i)^3 = -2 + 2i$ est bien une solution de l'équation (E).

b. Posons $z_1 = -z_0 = 2 - 2i$. Alors : $z_1^2 = (-z_0)^2 = z_0^2 = -8i$

Le nombre complexe $z_1 = 2 - 2i$ est aussi une solution de l'équation (E).

Remarque : le conjugué de z_0 n'est pas solution car l'équation (E) n'est pas à coefficients réels...

3. Posons cette fois : $z'_0 = (1 + i)^2 = 2i$

Ainsi, d'après la question 1 : $z_0'^3 = (1 + i)^6 = -8i$

Le nombre complexe $z'_0 = (1 + i)^2 = 2i$ est bien une solution de l'équation (E').

4. L'écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est :

$$z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

a. Calcul de l'affixe b du point $B = r(A)$:

$$b = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times 2i = -\sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

Calcul de l'affixe c du point $C = r(B)$:

$$c = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i$$

b. Si z est une solution de (E') alors $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$ l'est aussi puisque :

$$z'^3 = e^{2i\pi} z^3 = z^3 = -8i$$

Comme l'affixe $a = 2i$ du point A est une solution de (E'), on en déduit que b et c aussi.

5. a. Comme les nombres complexes a , b et c ont un module égal à 2, leurs images respectives A , B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon 2 ce qui facilite leur placement. (Voir figure)

b. Montrons que C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$:

$$e^{i\frac{\pi}{3}} (b - a) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (-\sqrt{3} - 3i) = \sqrt{3} - 3i = c - a$$

On en déduit que le triangle ABC est équilatéral de sens direct.

c. Le centre de gravité d'un triangle ABC est l'isobarycentre des sommets A , B et C .

Son affixe est donnée par : $\frac{a+b+c}{3} = 0$

Le centre de gravité du triangle ABC est bien sûr l'origine O du repère.

Remarque : l'utilisation du nombre $j = e^{2i\pi/3}$ permet de simplifier les calculs.

• Résolution directe de (E') :

$$z^3 = -8i = (2i)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{2i} \right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{2i} \in \{1; j; j^2\}$$

D'où les solutions de (E') :

$$\{2i; 2ij; 2ij^2\}$$

• Écriture complexe de la rotation r :

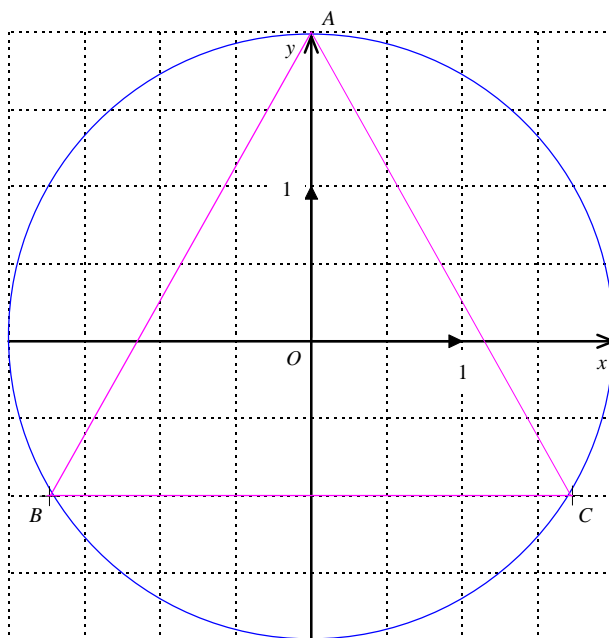
$$z' = jz$$

D'où : $b = ja = 2ij$ et $c = j^2a = 2ij^2$

On pouvait également montrer :

$$AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$$

Figure



Exercice 2 Spécialité (5 points)

1. Il suffit de développer :

$$(x - 1)(1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^k - (1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}) = x^k - 1$$

On pouvait démontrer cette identité plus formellement avec le symbole Σ .

Attention : les élèves qui ont utilisé la formule de sommation des termes d'une suite géométrique doivent traiter, à part, le cas $x = 1$...

2. a. On a :
$$a^n - 1 = a^{dk} - 1 = (a^d)^k - 1$$

Et en utilisant la question 1 en spécialisant $x = a^d$:

$$(a^d - 1)(1 + a^d + a^{2d} + \dots + a^{d(k-1)}) = (a^d)^k - 1 = a^n - 1$$

Ce qui prouve que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

b. On décompose $n = 2004$ en produit de facteurs premiers :

$$2004 = 2^2 \times 3 \times 167$$

D'après la question précédente appliquée avec $a = 2$ et le diviseur $d = 3$ de 2004, on a :

$$2^{2004} - 1 \text{ divisible par } 2^3 - 1$$

C'est-à-dire : $2^{2004} - 1$ divisible par 7

De même, en remarquant que $63 = 2^6 - 1$. On utilise cette fois $d = 6$:

$$2^{2004} - 1 \text{ divisible par } 63$$

Enfin, puisque $2^{2004} - 1$ est divisible par 63, il sera divisible par tout diviseur de 63 donc par 9.

3. a. Comme m' et n' sont premiers entre eux, le théorème de Bézout permet d'affirmer qu'il existe un couple d'entiers naturels (u', v') tels que :

$$m'u' + n'v' = 1$$

En multipliant par d :

$$mu' + nv' = d$$

Posons $u = u'$ et $v = -v'$ ainsi :

$$mu - nv = d$$

On pouvait obtenir directement ce résultat en appliquant le théorème de Bézout à m et n .

b. On a :
$$(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d \stackrel{3.a.}{=} a^{d+nv} - 1 - a^{nv+d} + a^d = a^d - 1$$

Comme d divise m , il divise aussi mu . D'après la question 2.a. :

$$a^d - 1 \text{ divise } a^{mu} - 1$$

De même, d divise n donc divise aussi nv . D'après la question 2.a. :

$$a^d - 1 \text{ divise } a^{nv} - 1$$

Donc $a^d - 1$ est un diviseur commun de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

Montrons que c'est le plus grand. Soit D un diviseur commun de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

Donc D est un diviseur de : $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d$

Et, d'après le calcul précédent : D divise $a^d - 1$

Tout diviseur commun D de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$ divise $a^d - 1$.

On a prouvé que $a^d - 1$ est le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

c. Choisissons des entiers m, n, u et v tels que :

$$mu = 63, nv = 60$$

On peut, par exemple, choisir $m = 3, u = 31, n = 3$ et $v = 20$. Ainsi, le pgcd de m et n est $d = 3$.

D'après la question 3.b. appliquée avec $a = 2$, cela donne :

$$\text{le pgcd de } 2^{63} - 1 \text{ et de } 2^{60} - 1 \text{ est égal à } 2^3 - 1 = 7$$

Remarque 1 : on pouvait obtenir ce résultat directement. Notons $d = \text{pgcd}(2^{63} - 1 ; 2^{60} - 1)$

Alors d divise $2^{63} - 2^{60} = 7 \times 2^{60}$ et comme d est nécessairement impair d divise 7.

Enfin, on a :

$$2^3 \equiv 1 [7]$$

Donc :

$$2^{3n} - 1 \equiv 0 [7]$$

Comme 60 et 63 sont des multiples de 3, on en déduit que 7 divise $2^{63} - 1$ et $2^{60} - 1$.

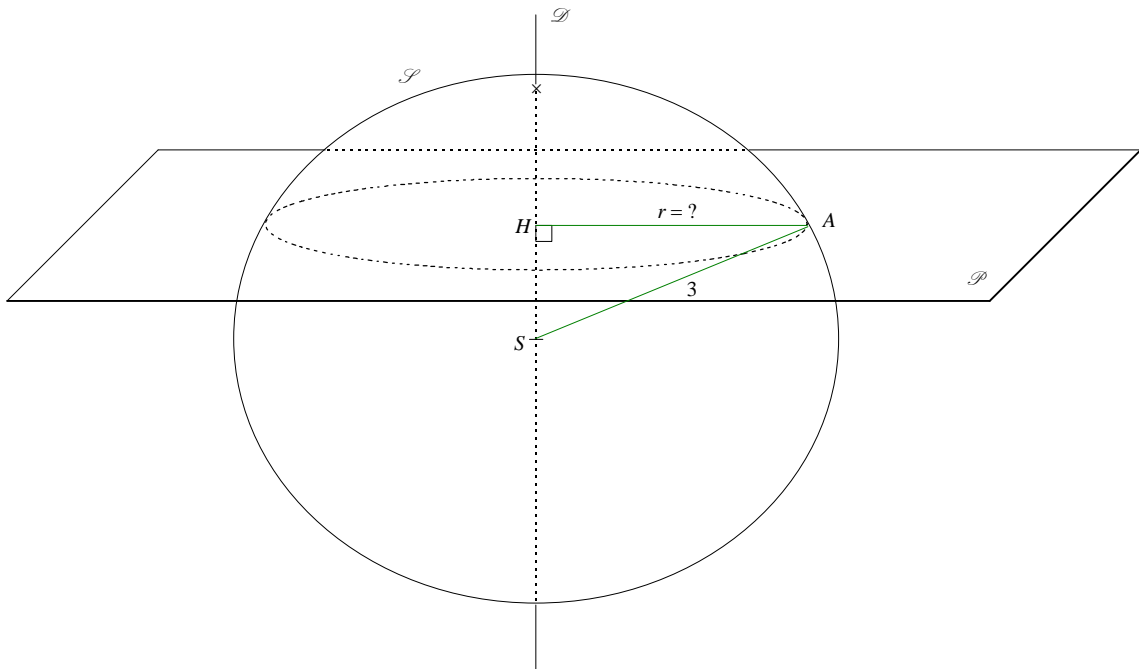
Bilan : le pgcd de $2^{63} - 1$ et $2^{60} - 1$ est 7.

Remarque 2 : on peut démontrer, plus généralement, que :

$$\text{pgcd}(a^m - 1 ; a^n - 1) = a^{\text{pgcd}(m ; n)} - 1$$

Exercice 3 (4 points)

Bien qu'aucune justification ne soit demandée, on donne quelques explications et on a fait une figure.



1. Puisque la droite \mathcal{D} est perpendiculaire au plan \mathcal{P} , elle est dirigée par un vecteur normal n de \mathcal{P} :

$$n \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{vmatrix}$$

On a alors : $M(x, y, z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow SM = \lambda n, \lambda \in \mathbb{R}$

Or :

$$SM \begin{vmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z \end{vmatrix}$$

Une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} est donc :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

Et en posant $t = \lambda - 1$:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = -3 - 3t \end{cases}$$

Réponse D

Remarque : en mode QCM, on élimine directement les propositions A et B car elles ne sont pas compatibles avec la condition $S \in \mathcal{D}$ et on élimine la proposition C car la droite \mathcal{D} n'est pas dirigée par le vecteur de coordonnées $(1; -2; 3)$

2. Comme la droite \mathcal{D} est perpendiculaire au plan \mathcal{P} , elle le coupe bien en un unique point H .

Ce point H est le point de \mathcal{D} dont le paramètre t vérifie :

$$(2 + t) + (-1 + t) - 3(-3 - 3t) + 4 = 0$$

$$14 + 11t = 0$$

$$t = -\frac{14}{11}$$

On en déduit les coordonnées de H :

$$x_H = 2 - \frac{14}{11} = \frac{8}{11} ; y_H = -1 - \frac{14}{11} = -\frac{25}{11} ; z_H = -3 + \frac{42}{11} = \frac{9}{11}$$

Réponse D

3. La distance du point S au plan \mathcal{P} est donnée par la formule :

$$d(S, \mathcal{P}) = \frac{|x_S + y_S - 3z_S + 4|}{\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

Autre méthode : comme on sait que la droite \mathcal{D} coupe le plan \mathcal{P} perpendiculairement en H , on a :

$$d(S, \mathcal{P}) = SH$$

La distance SH se calcule facilement et on retrouve $\frac{3}{\sqrt{11}}$.

Réponse B

4. Comme la droite \mathcal{D} (qui passe par le point S) est perpendiculaire au plan \mathcal{P} , et que la distance SH est inférieure à 3 (rayon de la sphère), l'intersection de la sphère \mathcal{S} et du plan \mathcal{P} est un cercle de centre H .

On calcule le rayon du cercle avec le théorème de Pythagore :

$$r^2 = SA^2 - SH^2 = 9 - \frac{9}{11} = \frac{90}{11}$$

D'où :

$$r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$$

Réponse B

Exercice 4 (4 points)

1. On a :

$$p([0 ; 200]) = \int_0^{200} \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^{200} = 1 - e^{-200\lambda}$$

Or, par hypothèse :

$$p([0 ; 200]) = 0,5$$

On en déduit :

$$1 - e^{-200\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$e^{-200\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$-200\lambda = -\ln 2$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{200}$$

2. La probabilité qu'un des composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines est :

$$p([300, +\infty[) = 1 - p([0, 300]) = e^{-300\lambda} = e^{-\frac{3}{2}\ln 2} = 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \simeq 0,35 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

3. a. On intègre $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^A x e^{-\lambda x} dx$ par parties :

On pose :

$$u(x) = x \text{ et } v'(x) = e^{-\lambda x}$$

Ainsi :

$$u'(x) = 1 \text{ et } v(x) = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$$

On obtient :

$$\lambda \int_0^A x e^{-\lambda x} dx = [-x e^{-\lambda x}]_0^A + \int_0^A e^{-\lambda x} dx = -A e^{-\lambda A} - \frac{1}{\lambda} [e^{-\lambda x}]_0^A = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$$

- b. Puis, on étudie la limite lorsque A tend vers $+\infty$. On sait que :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} -A e^{-\lambda A} = 0 \text{ (car } \lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0 \text{ et } \lambda > 0)$$

Et :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-\lambda A} = 0 \text{ (car } \lambda > 0)$$

D'où :

$$d_m = \frac{1}{\lambda} = \frac{200}{\ln 2} \simeq 289 \text{ semaines (à la semaine près)}$$

Exercice 5 (4 points)

1. Les assertions suivantes sont équivalentes :

x solution de (E) sur \mathbb{R}_+

$$25x' + 200x'' = 50 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

$$25v + 200v' = 50 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

$$v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4} \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

x' solution de (F) sur \mathbb{R}_+ .

L'équation différentielle (F) est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -\frac{1}{8}$ et $b = \frac{1}{4}$.

Ses solutions sont donc les fonctions de la forme :

$$v(t) = C e^{at} - \frac{b}{a} \text{ où } C \text{ est une constante}$$

Ce qui donne :
$$v(t) = C e^{-\frac{t}{8}} + 2$$

2. a. Comme $x' = v$, on a :
$$x'(t) = C e^{-\frac{t}{8}} + 2$$

La condition initiale $x'(0) = 0$ donne :
$$C = -2$$

D'où, pour tout réel positif t :
$$x'(t) = -2 e^{-\frac{t}{8}} + 2$$

b. En primitivant la précédente relation :

$$x(t) = 16 e^{-\frac{t}{8}} + 2t + K \text{ où } K \text{ est une constante}$$

La condition initiale $x(0) = 0$ donne :
$$K = -16$$

D'où, pour tout réel positif t :
$$x(t) = 2t - 16 + 16 e^{-\frac{t}{8}}$$

3. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, on a :
$$V = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-2 e^{-\frac{t}{8}} + 2 \right) = 2$$

Le vitesse du chariot est inférieure ou égale à 90% de sa valeur limite V pour les réels t tels que :

$$-2 e^{-\frac{t}{8}} + 2 \leq 2 \times \frac{90}{100}$$

$$e^{-\frac{t}{8}} \geq \frac{1}{10}$$

Par croissance du logarithme :
$$-\frac{t}{8} \geq \ln \frac{1}{10}$$

$$\frac{t}{8} \leq \ln 10$$

$$t \leq 8 \ln 10$$

Le chariot a une vitesse inférieure ou égale à 90% de sa valeur limite pour t compris entre 0 et 18,4 secondes. (On a arrondi à 10^{-1} par défaut)

4. La distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes est donnée par :

$$x(30) = 44 + 16 e^{-\frac{15}{4}} \simeq 44,4 \text{ m (au décimètre près)}$$