

**Exercice 1** (3 points)

Bien qu'aucune justification ne soit demandée dans cet exercice, on donne dans un but pédagogique quelques explications.

1. VRAI

On a :

$$\begin{array}{|c|} \hline G_1 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline I & C \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

D'où :

$G_1$  est le milieu de  $[CI]$

2. VRAI

En utilisant l'associativité d'une autre façon :

$$\begin{array}{|c|} \hline G_1 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & B & C & C \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline J & C \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Et par homogénéité, une multiplication par  $\frac{2}{3}$  des coefficients donne :

$$G_1 = \text{bar} \left\{ (J, 2), \left( C, \frac{2}{3} \right) \right\}$$

3. FAUX

Dans la somme vectorielle  $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ , la somme des coefficients est nulle donc le vecteur  $\overrightarrow{V_M}$  est constant :

$$\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$$

4. VRAI

On sait que pour  $m \neq -\frac{1}{3}$  :

$$\begin{array}{|c|} \hline G_m \\ \hline 1+3m \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 1 & m & 2m \\ \hline \end{array}$$

On sait que pour tout point  $M$  du plan :

$$(1 + 3m)\overrightarrow{MG_m} = \overrightarrow{MA} + m\overrightarrow{MB} + 2m\overrightarrow{MC}$$

En spécialisant  $M = A$  :  $(1 + 3m)\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AB} + 2m\overrightarrow{AC} = m(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$

Les vecteurs  $\overrightarrow{AG_m}$  sont tous colinéaires entre eux (puisque colinéaire au même vecteur  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ ).

En particulier  $\overrightarrow{AG_m}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{AG_{-1}}$ . Autrement dit,  $G_m$  est un point de la droite  $(AG_{-1})$ .

Remarque : ce résultat reste vrai même si le triangle  $ABC$  n'est pas supposé rectangle en  $A$ .

5. VRAI

On a :

$$\begin{array}{|c|} \hline G_{-0,5} \\ \hline -0,5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 1 & -0,5 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Donc, pour tout point  $M$  du plan :  $\overrightarrow{MA} - 0,5\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = -0,5\overrightarrow{MG_{-1/2}}$

En spécialisant  $M = B$  :  $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = -0,5\overrightarrow{BG_{-1/2}}$

$$\overrightarrow{BG_{\frac{1}{2}}} = 2 \overrightarrow{AC}$$

Or, le vecteur  $\overrightarrow{AC}$  est orthogonal à  $\overrightarrow{AB}$  et donc à  $\overrightarrow{IB}$  d'où :

$$\overrightarrow{BG_{\frac{1}{2}}} \perp \overrightarrow{IB}$$

Le triangle  $IBG_{\frac{1}{2}}$  est bien rectangle (en  $B$ )

6. FAUX

Il s'agit de la réciproque de la question 4. Tout point  $P$  de  $(AG_{-1})$  est-il "un  $G_m$ " ?

On a vu que pour tout  $m \neq -\frac{1}{3}$  :

$$(1 + 3m) \overrightarrow{AG_m} = m \overrightarrow{AB} + 2m \overrightarrow{AC} = m(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$$

En spécialisant  $m = -1$  :

$$-2 \overrightarrow{AG_{-1}} = -(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$$

D'où :

$$(1 + 3m) \overrightarrow{AG_m} = 2m \overrightarrow{AG_{-1}}$$

$$\overrightarrow{AG_m} = \frac{2m}{1 + 3m} \overrightarrow{AG_{-1}}$$

La question est :

le coefficient  $\frac{2m}{1 + 3m}$  parcourt-il  $\mathbb{R}$  entier ?

Soit  $P$  un point de la droite  $(AG_{-1})$ . Il existe donc un réel  $k$  tel que :

$$\overrightarrow{AP} = k \overrightarrow{AG_{-1}}$$

Dire qu'il existe un réel  $m$  tel que  $P = G_m$ , c'est dire que l'équation  $\frac{2m}{1 + 3m} = k$  admet une solution  $m$ .

$$2m = (1 + 3m)k$$

$$m(2 - 3k) = k$$

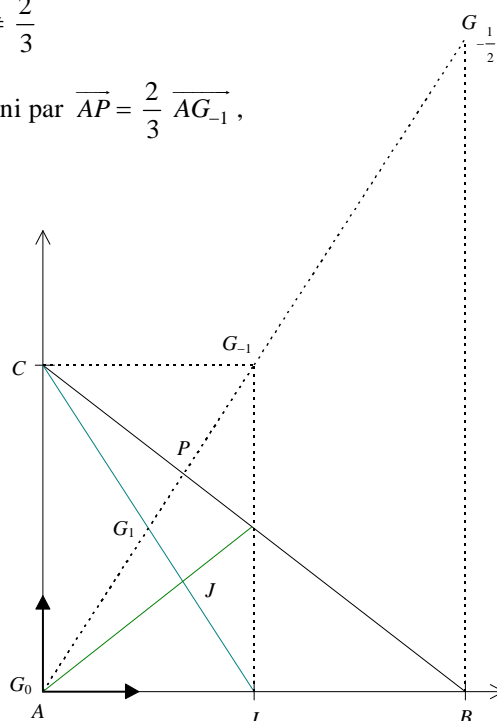
Si  $k = 0$  alors  $m = 0$  et on récupère le point  $G_0 = A$ . Supposons désormais  $k \neq 0$ .

L'équation ci-dessus n'a de solution  $m$  que si :  $2 - 3k \neq 0$

$$k \neq \frac{2}{3}$$

Conclusion : pour le point  $P$  de la droite  $(AG_{-1})$  défini par  $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AG_{-1}}$ ,

il n'existe pas de réel  $m$  tel que  $P = G_m$ .



**Exercice 2** (5 points)

1.  $(E) : z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$

a. En développant puis en réduisant :

$$(z - 2)(z^2 + az + b) = z^3 + (a - 2)z^2 + (b - 2a)z - 2b$$

Pour que cette quantité soit, pour tout  $z$ , égale à  $z^3 + 4z^2 + 2z - 28$  il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} a - 2 = 4 \\ b - 2a = 2 \\ -2b = -28 \end{cases}$$

D'où :  $a = 6$  et  $b = 14$

Ainsi, l'équation (E) s'écrit :

$$(z - 2)(z^2 + 6z + 14) = 0$$

b. On a donc  $z = 2$  ou  $z^2 + 6z + 14 = 0$

La deuxième équation est du second degré. On peut calculer son discriminant ou plus efficacement canoniser puis factoriser :

$$z^2 + 6z + 14 = (z + 3)^2 + 5 = [(z + 3) - \sqrt{5} \mathbf{i}] [(z + 3) + \sqrt{5} \mathbf{i}]$$

On en déduit l'ensemble  $S$  des solutions de (E) :

$$S = \{2 ; -3 + \sqrt{5} \mathbf{i} ; -3 - \sqrt{5} \mathbf{i}\}$$

2. a. Remarquons que si  $z = x + \mathbf{i}y$  alors :

$$z^2 = (x + \mathbf{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathbf{i}xy \text{ et } \bar{z}^2 = (x - \mathbf{i}y)^2 = x^2 - y^2 - 2\mathbf{i}xy$$

On a donc l'équivalence des assertions suivantes :

$$M \in (H)$$

$$z^2 - 4 = 4 - \bar{z}^2$$

$$x^2 - y^2 + 2\mathbf{i}xy - 4 = 4 - x^2 + y^2 + 2\mathbf{i}xy$$

$$2x^2 - 2y^2 = 8$$

$$x^2 - y^2 = 4$$

b. C'est un calcul facile :

$$x_A^2 - y_A^2 = 4 \text{ et d'après 2.a., } A \in (H)$$

$$x_B^2 - y_B^2 = 9 - 5 = 4 \text{ et d'après 2.a., } B \in (H)$$

De même :  $C \in (H)$

3. a. L'affixe  $a'$  du point  $A'$  image du point  $A$  d'affixe  $a$  par la rotation  $r$  se calcule avec la relation :

$$a' = e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}} a = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times 2 = \sqrt{2} - \mathbf{i}\sqrt{2}$$

De même pour  $b'$  et  $c'$  :

$$b' = e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}} b = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times (-3 - \mathbf{i}\sqrt{5}) = \frac{-3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2} + \mathbf{i} \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2}$$

$$c' = e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}} c = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times (-3 + \mathbf{i}\sqrt{5}) = \frac{-3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2} + \mathbf{i} \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}$$

b. On a : 
$$z' = e^{-i\frac{\pi}{4}} z$$

Donc : 
$$z = e^{i\frac{\pi}{4}} z' = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times (x' + iy') = \frac{x'\sqrt{2} - y'\sqrt{2}}{2} + i\frac{x'\sqrt{2} + y'\sqrt{2}}{2}$$

D'où : 
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \text{ et } y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

On a les équivalences suivantes : 
$$M' \in (H')$$

$$M \in (H)$$

$$x^2 - y^2 = 4$$

$$\frac{(x' - y')^2}{2} - \frac{(x' + y')^2}{2} = 4$$

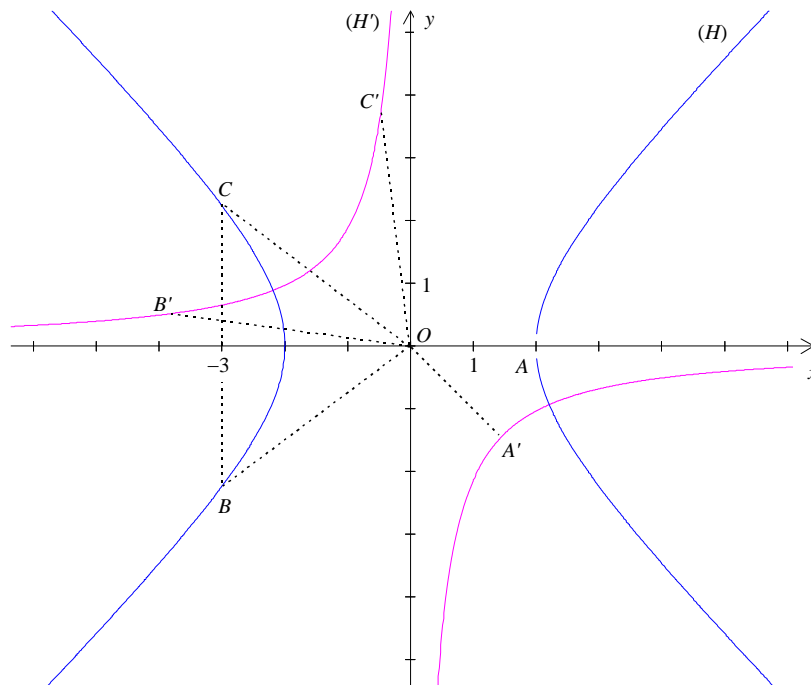
$$-4x'y' = 8$$

$$x'y' = -2$$

Remarque : la courbe  $(H')$  est donc une hyperbole puisque son équation est de la forme :

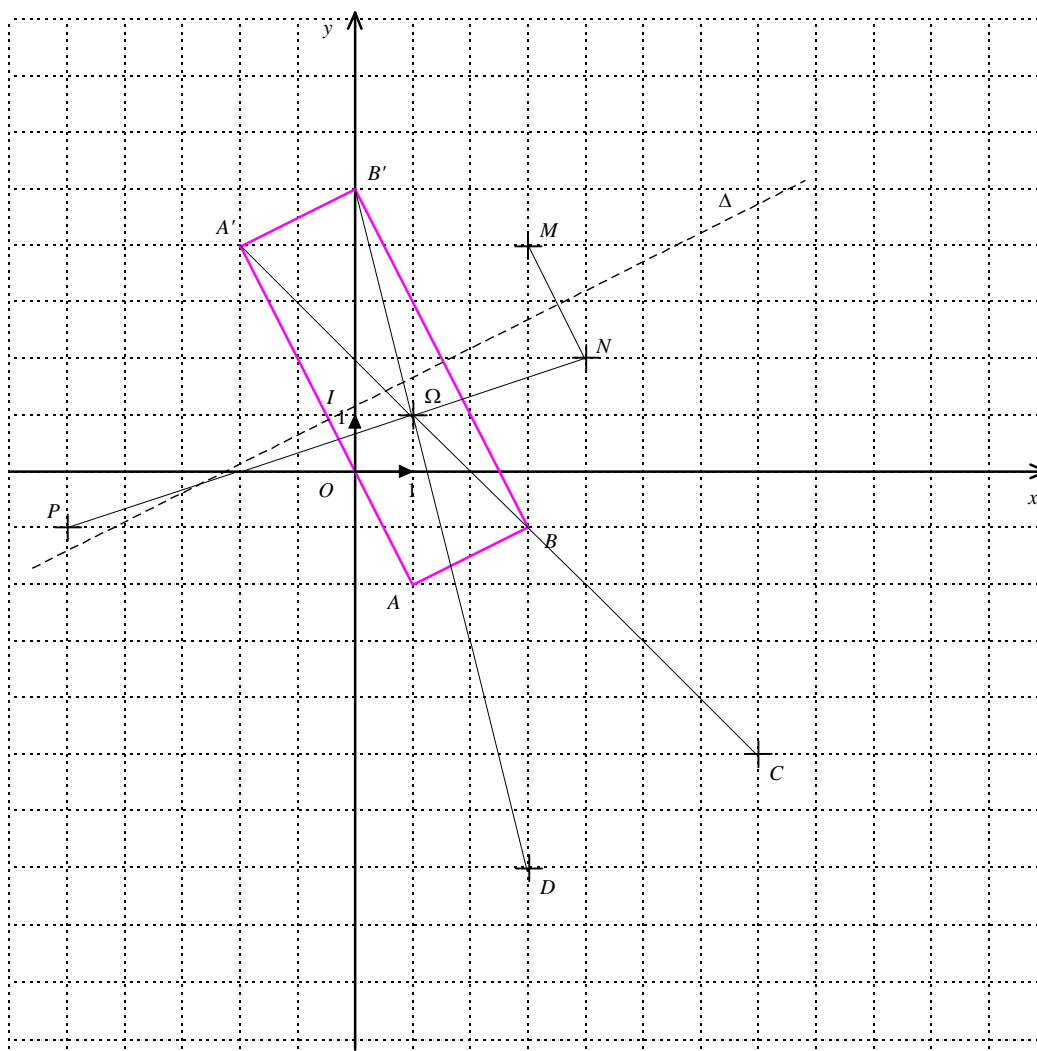
$$y = \frac{k}{x}$$

La courbe  $(H)$  image de  $(H')$  par une rotation est donc aussi une hyperbole.



**Exercice 2 Spécialité** (5 points)

1. a.



On a : 
$$z_B - z_A = 2 + \mathbf{i} = z_{B'} - z_{A'}$$

Ce qui prouve déjà que  $ABB'A'$  est un parallélogramme.

De plus : 
$$\overline{AB} \cdot \overline{AA'} = 2 \times (-3) + 1 \times 6 = 0$$

Donc  $ABB'A'$  est un rectangle.

b. L'axe  $(\Delta)$  est la médiatrice de  $[AA']$ . Le milieu  $I$  de  $[AA']$  a pour affixe  $z_I = -\frac{1}{2} + \mathbf{i}$ .

Cherchons une équation de  $(\Delta)$ .

$$M(x, y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overline{IM} \cdot \overline{AA'} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right) \times (-3) + (y - 1) \times 6 = 0 \Leftrightarrow -2x + 4y - 5 = 0$$

L'équation réduite de  $(\Delta)$  est : 
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

c. Une réflexion est une similitude indirecte. Son écriture complexe est de la forme :

$$z' = a \bar{z} + b$$

La condition  $s(A) = A'$  se traduit par :

$$-2 + 4\mathbf{i} = a(1 + 2\mathbf{i}) + b$$

La condition  $s(B) = B'$  se traduit par :

$$5i = a(3 + i) + b$$

On détermine les complexes  $a$  et  $b$  en résolvant le système constitué des deux équations ci-dessus.

En retranchant membre à membre :  $2 + i = a(2 - i)$

D'où :

$$a = \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)^2}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

Puis, on en déduit :

$$b = 5i - a(3 + i) = -1 + 2i$$

On a bien :

$$z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\bar{z} + 2i - 1$$

2. a. On calcule :

$$z_C = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right) \times (1 + 2i) + 5 - i = 7 - 5i$$

$$z_D = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right) \times (3 + i) + 5 - i = 3 - 7i$$

b. L'écriture complexe de  $h$  est :

$$z' - (1 + i) = -2(z - (1 + i))$$

Calculons l'affixe de  $h(A')$  :

$$z' = -2(z_{A'} - (1 + i)) + (1 + i) = 7 - 5i$$

On a bien :

$$h(A') = C$$

Calculons l'affixe de  $h(B')$  :

$$z' = -2(z_{B'} - (1 + i)) + (1 + i) = 3 - 7i$$

On a bien :

$$h(B') = D$$

c. La transformation réciproque  $h^{-1}$  de  $h$  est l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $-\frac{1}{2}$ .

Son écriture complexe est :

$$z - (1 + i) = -\frac{1}{2}(z_1 - (1 + i))$$

$$z = -\frac{1}{2}z_1 + \frac{3}{2}(1 + i)$$

3. a. L'écriture complexe de  $f = h^{-1} \circ g$  est donnée en composant les écritures complexes de  $g$  et  $h^{-1}$  :

$$z' = -\frac{1}{2} \left[ \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)\bar{z} + 5 - i \right] + \frac{3}{2}(1 + i)$$

$$z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\bar{z} - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\bar{z} + 2i - 1$$

On constate que :

$$f = s$$

On a donc :

$$h^{-1} \circ g = s$$

D'où :

$$g = h \circ s$$

Construction du point  $P$  image par  $g$  d'un point  $M$  :

i) construire le symétrique  $N$  de  $M$  par rapport à  $(\Delta)$

ii) construire l'image de  $N$  par l'homothétie  $h$ , c'est  $P$

**Exercice 3** (4 points)1. a. Loi de probabilité de  $X$  :

Valeurs $x_i$ de $X$	8	5	0	$-a$
Probabilités $p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{9}{15}$

b. On sait que 
$$E(X) = \sum_{i=1}^4 p_i x_i$$
On cherche  $a$  pour avoir une espérance nulle :

$$18 - 9a = 0$$

$$a = 2$$

2. a. La probabilité qu'un joueur gagne est :

$$P(X > 0) = P((X = 8) \cup (X = 5))$$

Et comme les événements  $(X = 8)$  et  $(X = 5)$  sont incompatibles :

$$P(X > 0) = P(X = 8) + P(X = 5) = \frac{1}{5}$$

b. On répète de manière indépendante  $n = 5$  fois la partie. On note  $Y$  le nombre de parties gagnées.La variable aléatoire  $Y$  suit donc la loi binomiale de paramètres  $n = 5$  et  $p = \frac{1}{5}$ 

On calcule alors :

$$P(Y = 2) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = \frac{128}{625} = 0,2048$$

$$P(Y = 5) = p^5 = \frac{1}{3125} = 3,2 \times 10^{-4}$$

c. L'espérance de la loi binomiale est donnée par :

$$E(Y) = np = 5 \times \frac{1}{5} = 1$$

En jouant cinq fois, le joueur gagne en moyenne une partie.

**Exercice 4** (8 points)**Partie I**

$$(E_n) : y' + y = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

1. a. Par hypothèse, la fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$  on a :

$$g'(x) = h'(x) e^{-x} - h(x) e^{-x}$$

On a les équivalences suivantes :

$g$  est solution de  $(E_n)$  sur  $\mathbb{R}$

$$\text{pour tout réel } x : g'(x) + g(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

$$\text{pour tout réel } x : h'(x) e^{-x} - h(x) e^{-x} + h(x) e^{-x} = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

$$\text{pour tout réel } x : h'(x) e^{-x} = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

Et comme l'exponentielle ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  :

$$\text{pour tout réel } x : h'(x) = \frac{x^n}{n!}$$

- b. En primitivant  $h'$  nous obtenons :

$$h(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + C \quad \text{où } C \text{ est une constante.}$$

Tenant compte de la condition  $h(0) = 0$ , il vient  $C = 0$  d'où :

$$h(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{Et finalement, pour tout réel } x : g(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x}$$

Nous avons montré, dans cette question, que la fonction  $g$  ainsi définie est une solution particulière de  $(E_n)$ .

2. Dans cette question, on suppose que la fonction  $g$  vérifie les mêmes hypothèses qu'à la question 1.

- a. On a les équivalences suivantes :

$\varphi$  est solution de  $(E_n)$  sur  $\mathbb{R}$

$$\text{pour tout réel } x : \varphi'(x) + \varphi(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

$$\text{pour tout réel } x : \varphi'(x) + \varphi(x) = g'(x) + g(x)$$

$$(\varphi - g)' + (\varphi - g) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$\varphi - g$  est solution de  $(F)$

- b. Les solutions  $y$  de l'équation différentielle  $(F) : y' = -y$  sont données par :

$$y(x) = K e^{-x} \quad \text{où } K \text{ est une constante}$$

- c. On a les équivalences suivantes :

$\varphi$  est solution de  $(E_n)$  sur  $\mathbb{R}$

$\varphi - g$  est solution de  $(F)$

pour tout réel  $x$  :  $\varphi(x) - g(x) = K e^{-x}$

pour tout réel  $x$  :  $\varphi(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x} + K e^{-x}$

d. La condition  $f(0) = 0$  donne :  $K = 0$

La solution  $f$  recherchée est définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x}$$

## Partie II

1. a. La fonction  $f_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (comme produit de fonctions qui le sont) et :

$$f_1'(x) = e^{-x} - x e^{-x}$$

On constate alors que pour tout réel  $x$  :

$$f_1'(x) + f_1(x) = e^{-x} = f_0(x)$$

La fonction  $f_1$  est solution, sur  $\mathbb{R}$ , de l'équation différentielle  $y' + y = f_0$ .

b. On considère la propriété  $\wp$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$\wp(n) : \text{pour tout réel } x, f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

On a  $f_1(x) = x e^{-x} = \frac{x^1}{1!} e^{-x}$  pour tout réel  $x$  d'où  $\wp(1)$ . La propriété  $\wp$  est initialisée en 1.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons  $\wp(n)$  :

$$\text{pour tout réel } x, f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

Nous savons que la fonction  $f_{n+1}$  vérifie sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$y' + y = f_n = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

Et comme  $f_{n+1}(0) = 0$ , la partie I nous permet d'affirmer que pour tout réel  $x$  :

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x}$$

D'où  $\wp(n+1)$ .

La propriété  $\wp$  est donc héréditaire à partie du rang 1.

Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout réel  $x$  :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

2. a. Soit  $x \in [0 ; 1]$  donc :  $-1 \leq -x \leq 0$

Par croissance de l'exponentielle :  $e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$

Comme  $e^{-1} \geq 0$  :  $0 \leq e^{-x} \leq 1$

En multipliant par  $\frac{x^n}{n!}$  :  $0 \leq \frac{x^n}{n!} e^{-x} \leq \frac{x^n}{n!}$

C'est-à-dire :  $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1 :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n!} dx$$

Or :  $\int_0^1 \frac{x^n}{n!} dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!}$

On a bien :  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$

En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite  $(I_n)$  admet une limite nulle.

b. Par linéarité de l'intégrale, on a pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$I_k - I_{k-1} = \int_0^1 f_k(x) - f_{k-1}(x) dx$$

Et comme, par hypothèse,  $f_k - f_{k-1} = -f'_k$  :

$$I_k - I_{k-1} = \int_1^0 f'_k(x) dx = -f_k(1) = -\frac{1}{k!} e^{-1}$$

c. On a :  $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}$

Par télescopie, on peut écrire que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$I_n - I_0 = \sum_{k=1}^n (I_k - I_{k-1})$$

$$I_n - 1 + e^{-1} = -\sum_{k=1}^n \frac{e^{-1}}{k!}$$

$$I_n = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{e^{-1}}{k!}$$

d. On a vu que la suite  $(I_n)$  converge vers 0, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{e^{-1}}{k!} = 1$$

Et finalement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$