

Exercice 1 (4 points)

1. On calcule :

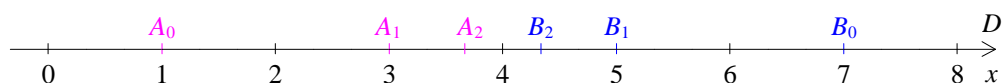
$$a_1 = \frac{2a_0 + b_0}{3} = 3$$

$$b_1 = \frac{a_0 + 2b_0}{3} = 5$$

$$a_2 = \frac{2a_1 + b_1}{3} = \frac{11}{3}$$

$$b_2 = \frac{a_1 + 2b_1}{3} = \frac{13}{3}$$

Figure :



Cette figure permet de conjecturer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes (avec (a_n) croissante et (b_n) décroissante) et convergent vers 4.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(a_n + 2b_n) - (2a_n + b_n)}{3} = \frac{b_n - a_n}{3} = \frac{1}{3} u_n$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison : $q = \frac{1}{3}$

Son terme initial est : $u_0 = b_0 - a_0 = 6$

On en déduit une expression de u_n en fonction de n :

$$u_n = u_0 q^n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3^{n-1}}$$

3. Comme la suite (u_n) est strictement positive (son terme initial et sa raison le sont), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n < b_n$$

Géométriquement, cela signifie que chaque point A_n est situé à gauche de son homologue B_n sur la droite D .

Étude du sens de variation de la suite (a_n) . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n + b_n}{3} - a_n = \frac{b_n - a_n}{3}$$

Et comme $a_n < b_n$, il vient : $a_{n+1} - a_n > 0$

La suite (a_n) est strictement croissante.

Géométriquement, cela signifie que chaque point A_n est situé à gauche de son successeur A_{n+1} sur D .

Étude du sens de variation de la suite (b_n) . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + 2b_n}{3} - b_n = \frac{a_n - b_n}{3}$$

Et comme $a_n < b_n$, il vient : $b_{n+1} - b_n < 0$

La suite (b_n) est strictement décroissante.

Géométriquement, cela signifie que chaque point B_n est situé à droite de son successeur B_{n+1} sur D .

4. Comme la raison q de la suite (u_n) est dans l'intervalle $] -1, 1[$, cette suite converge vers 0.

Récapitulons. On a :

$$\begin{cases} (a_n) \text{ croissante} \\ (b_n) \text{ décroissante} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \end{cases}$$

Ce qui signifie que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{(a_n + 2b_n) + (2a_n + b_n)}{3} = a_n + b_n = v_n$$

La suite (v_n) est donc constante égale à : $v_0 = a_0 + b_0 = 8$

Le milieu du segment $[A_n B_n]$ a pour abscisse $\frac{a_n + b_n}{2} = \frac{v_n}{2} = 4$. Il est indépendant de n .

Les segments $[A_n B_n]$ ont donc même milieu I d'abscisse 4.

6. Comme les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ .

La suite (v_n) (qui est la somme des suites (a_n) et (b_n)) converge donc vers 2ℓ .

Or, la limite de la suite (v_n) est 8 d'où : $\ell = 4$

Géométriquement, quel que soit l'intervalle $J =]4 - \varepsilon ; 4 + \varepsilon[$, il existe un rang N à partir duquel toutes les abscisses a_n et b_n sont dans J .

Exercice 2 (7 points)

1. Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur l'intervalle $[0 ; a]$ est $t \mapsto \ln(1+t)$.

D'où :
$$I_0(a) = \int_0^a \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^a = \ln(1+a) - \ln 1 = \ln(1+a)$$

2. On a :

$$I_1(a) = \int_0^a \frac{t-a}{(1+t)^2} dt$$

Posons :

$$u(t) = t - a \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$$

Ainsi :

$$u'(t) = 1 \quad \text{et} \quad v(t) = -\frac{1}{1+t}$$

Une intégration par parties donne alors :

$$I_1(a) = \left[-\frac{t-a}{1+t} \right]_0^a + \int_0^a \frac{1}{1+t} dt$$

$$I_1(a) = -a + \ln(1+a)$$

3. Posons cette fois pour $k \in \mathbb{N}^*$: $u(t) = (t-a)^{k+1}$ et $v'(t) = \frac{1}{(1+t)^{k+2}}$

Ainsi :

$$u'(t) = (k+1)(t-a)^k \quad \text{et} \quad v(t) = -\frac{1}{(k+1)(1+t)^{k+1}}$$

Une intégration par parties donne alors :

$$I_{k+1}(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^{k+1}}{(1+t)^{k+2}} dt = \left[-\frac{(t-a)^{k+1}}{(k+1)(1+t)^{k+1}} \right]_0^a + I_k(a)$$

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a)$$

4. D'après la question précédente appliquée avec $k = 1, 2, 3, 4$ on obtient :

$$I_2(a) = \frac{a^2}{2} + I_1(a) = \frac{a^2}{2} - a + \ln(1+a)$$

$$I_3(a) = -\frac{a^3}{3} + I_2(a) = -\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - a + \ln(1+a)$$

$$I_4(a) = \frac{a^4}{4} + I_3(a) = \frac{a^4}{4} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - a + \ln(1+a)$$

$$I_5(a) = -\frac{a^5}{5} + I_4(a) = -\frac{a^5}{5} + \frac{a^4}{4} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - a + \ln(1+a)$$

Finalement, on a bien :

$$I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$$

5. On a :

$$J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt = \left[\frac{(t-a)^6}{6} \right]_0^a = -\frac{a^6}{6}$$

6. a. Partons de l'encadrement :

$$0 \leq t \leq a$$

En retranchant a :

$$t - a \leq 0$$

Par croissance de l'application $x \mapsto x^5$ sur \mathbb{R}_- , il vient :

$$(t-a)^5 \leq 0$$

Par ailleurs, il est clair que pour tout $t \geq 0$:

$$1+t \geq 1$$

Par croissance de l'application $x \mapsto x^6$ sur $[1; +\infty[$, il vient :

$$(1+t)^6 \geq 1$$

Puis par décroissance de la fonction inverse sur $[1; +\infty[$:

$$\frac{1}{(1+t)^6} \leq 1$$

Et en multipliant par $(t-a)^5 \leq 0$:

$$\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$$

b. Comme $(t-a)^5 \leq 0$ et $(1+t)^6 > 0$, on a :

$$(t-a)^5 \leq \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \leq 0$$

En intégrant cet encadrement entre 0 et a (a étant positif), nous obtenons :

$$J(a) \leq I_5(a) \leq 0$$

7. D'après la question 4, on a pour tout $a \in [0; +\infty[$:

$$|\ln(1+a) - P(a)| = |I_5(a)|$$

Mais d'après la question 6.b. : $0 \leq |I_5(a)| \leq |J(a)|$

D'où : $|\ln(1+a) - P(a)| \leq |J(a)|$

Et d'après la question 5 : $|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$

8. Pour que $P(a)$ soit une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près, il suffit que :

$$\frac{a^6}{6} \leq 10^{-3}$$

$$a^6 \leq 6 \times 10^{-3}$$

Si a est nul alors cette inégalité est vérifiée. Supposons désormais $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Par croissance de l'application $t \mapsto t^{1/6}$ sur $]0; +\infty[$ (car $\frac{1}{6} > 0$), il vient :

$$a \leq 0,006^{1/6}$$

Un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près est :

$$[0; 0,006^{1/6}]$$

Une valeur approchée, par défaut, à 10^{-2} près de $0,006^{1/6}$ est 0,42.

L'intervalle suivant convient également : $[0; 0,42]$

Exercice 3 (4 points)

Bien qu'aucune justification ne soit demandée dans cet exercice, on donne dans un but pédagogique quelques explications.

$$z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

1. On calcule :

$$z^2 = 2 + \sqrt{2} - 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} + i^2(2-\sqrt{2})$$

$$z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$$

Réponse B

Pour gagner du temps, on pouvait se contenter de calculer juste la partie imaginaire qui permettait à elle seule de trancher.

2. On a : $z^2 = 2\sqrt{2}(1-i) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Réponse B

3. Puisqu'on nous donne 4 propositions, on peut les élever au carré et voir celle qui donnera z^2 :

$$\left(2e^{i\frac{7\pi}{8}}\right)^2 = 4e^{i\frac{7\pi}{4}} = 4e^{-i\frac{\pi}{4}} = z^2$$

On contrôle tout de même les suivantes (il existe plusieurs nombres complexes dont le carré vaut z^2) :

$$\left(2e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} \neq z^2$$

$$\left(2e^{i\frac{5\pi}{8}}\right)^2 = 4e^{i\frac{5\pi}{4}} = 4e^{-i\frac{3\pi}{4}} \neq z^2$$

$$\left(2e^{i\frac{3\pi}{8}}\right)^2 = 4e^{i\frac{3\pi}{4}} \neq z^2$$

Réponse A

Question légitime : s'il ne nous est pas donné de propositions de réponses, comment déterminer la forme exponentielle de z connaissant celle de z^2 ? On procède ainsi :

On pose :
$$z = \rho e^{i\theta}$$

Ainsi :
$$z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$$

Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même module et des arguments égaux modulo 2π , ce qui permet d'écrire le système suivant :

$$\begin{cases} \rho^2 = 4 \\ 2\theta = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

Et comme un module est toujours positif, ce système équivaut à :

$$\begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = -\frac{\pi}{8} [\pi] \end{cases}$$

Les arguments possibles de z sont donc de la forme :

$$\theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Cherchons les différentes valeurs de k pour lesquelles $\theta \in]-\pi ; \pi]$ (argument principal) :

$$-\pi < -\frac{\pi}{8} + k\pi \leq \pi$$

$$-\frac{7}{8} < k \leq \frac{9}{8}$$

Et comme k est un entier : $k = 0$ ou $k = 1$

Les solutions de l'équation $z^2 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ sont donc :

$$z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{8}} \quad \text{et} \quad z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$$

Or, le nombre complexe $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ a sa partie réelle négative donc ça ne peut pas être z_1 .

D'où :
$$z = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$$

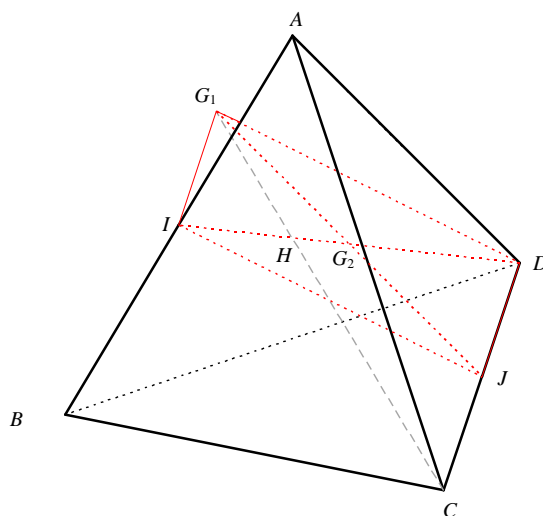
4. Puisque $z = 2 e^{i \frac{7\pi}{8}}$, il s'écrit sous forme trigonométrique :

$$z = 2 \left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) \right)$$

Par identification, il vient : $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Réponse A

Exercice 4 (5 points)



1. a. Soit H le centre de gravité du triangle ABD . Par associativité, on a ainsi :

$$\begin{array}{|c|} \hline G_1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline H & C \\ \hline 3 & -1 \\ \hline \end{array}$$

On a donc :

$$3 \overrightarrow{HG_1} - \overrightarrow{CG_1} = \vec{0}$$

Et d'après la relation de Chasles :

$$3 \overrightarrow{HG_1} - \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{HG_1} = \vec{0}$$

$$2 \overrightarrow{HG_1} = -\overrightarrow{HC}$$

$$\overrightarrow{HG_1} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{HC}$$

Cette dernière relation permet de construire facilement le point G_1 .

b. Toujours par associativité, on a :

$$\begin{array}{|c|} \hline G_2 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & D \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline I & D \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Donc G_2 est le milieu du segment $[ID]$.

c. Comme G_1 est le barycentre de $\{(A, 1); (B, 1); (C, -1); (D, 1)\}$, on a pour tout point M de l'espace :

$$\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC} + \overline{MD} = 2 \overline{MG_1}$$

En spécialisant $M = I$:

$$2 \overline{IG_1} = -\overline{IC} + \overline{ID} = \overline{CD} = 2 \overline{JD}$$

$$\overline{IG_1} = \overline{JD}$$

Donc le quadrilatère IG_1DJ est bien un parallélogramme.

On en déduit que G_2 est le milieu du segment $[G_1J]$.

2. a. Le barycentre G_m existe si et seulement si la somme des coefficients est non nulle :

$$1 + 1 + (m - 2) + m \neq 0$$

$$m \neq 0$$

D'où :

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}^*$$

b. Toujours par associativité, on a :

$$\begin{array}{|c|} \hline G_m \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & m-2 & m \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline I & C & D \\ \hline 2 & m-2 & m \\ \hline \end{array}$$

Donc le point G_m est bien situé dans le plan (ICD) .

c. Comme G_m est le barycentre de $\{(I, 2); (C, m - 2); (D, m)\}$, on a pour tout point M de l'espace :

$$2 \overline{MI} + (m - 2) \overline{MC} + m \overline{MD} = 2m \overline{MG_m}$$

En spécialisant $M = J$:

$$2 \overline{JI} + (m - 2) \overline{JC} + m \overline{JD} = 2m \overline{JG_m}$$

Mais comme J est le milieu de $[CD]$, on a $m \overline{JC} + m \overline{JD} = \vec{0}$, d'où :

$$2 \overline{JI} - 2 \overline{JC} = 2m \overline{JG_m}$$

$$m \overline{JG_m} = \overline{CI}$$

On a prouvé que le vecteur $m \overline{JG_m}$ est constant égal à \overline{CI} .

d. Soit \mathcal{D} la droite passant par J et dirigée par le vecteur \overline{CI} .

Comme, pour tout $m \in \mathbb{R}^*$, on a $\overline{JG_m} = \frac{1}{m} \overline{CI}$, on en déduit que $G_m \in \mathcal{D} \setminus \{J\}$.

Réciproquement, si Z est un point de $\mathcal{D} \setminus \{J\}$, alors il existe un réel $t \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\overline{JZ} = t \overline{CI}$$

En posant $m = \frac{1}{t}$, il vient :

$$\overline{JZ} = \frac{1}{m} \overline{CI}$$

D'où :

$$Z = G_m$$

Conclusion :

$$\mathcal{F} = \mathcal{D} \setminus \{J\}$$

Exercice 4 Spécialité (5 points)

1. Voir ci-dessous.
2. a. L'image de la droite (BC) par le quart de tour direct r est la droite passant par $r(B) = D$ et perpendiculaire à (BC) , c'est-à-dire (CD) .

b. Par définition du point R : $R = \delta \cap (BC)$

Et comme δ est perpendiculaire à (AP) :

$$r(R) = r(\delta \cap (BC)) = r(\delta) \cap r(BC) = (AP) \cap (CD) = Q$$

Écrivons : $P = (AP) \cap (BC)$

Ainsi : $r(P) = r((AP) \cap (BC)) = r(AP) \cap r(BC) = \delta \cap (CD) = S$

- c. Comme r est un quart de tour direct de centre A , on déduit de la question précédente que :

ARQ et APS sont des triangles rectangles isocèles directs en A

3. a. Comme ARQ est un triangle rectangle isocèle direct en A et que M est le milieu de $[RQ]$, on a :

$$\begin{cases} (\overline{AR}, \overline{AM}) = \frac{\pi}{4} \\ AM = \frac{\sqrt{2}}{2} AR \end{cases}$$

On en déduit : $s(R) = M$

De même en raisonnant dans APS : $s(P) = N$

- b. Puisque $s(P) = N$, le lieu géométrique du point N quand P décrit $]BC[$ est $s(]BC[) =]OD[$

- c. Par construction, les points R, B, P et C sont alignés.

Or, les images respectives de ces quatre points par la similitude s sont M, O, N et D .

Par conservation de l'alignement les points M, O, N et D sont donc alignés.

Et comme $B \in (OD)$, on a l'alignement des points M, B, N et D .

