

L'utilisation d'une calculatrice n'est pas autorisée

Exercice 1 (3 points)

Bien qu'aucune justification ne soit demandée dans cet exercice, on donne dans un but pédagogique quelques explications.

1. La fonction f est de la forme :
$$f = \frac{1}{v} \quad \text{avec } v(x) = 1 + e^x$$

Comme la fonction v est dérivable sur \mathbb{R} (car l'exponentielle l'est) et qu'elle ne s'annule pas sur \mathbb{R} (puisque l'exponentielle y est strictement positive), la fonction f est donc bien dérivable sur \mathbb{R} . Sa courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0 admet donc bien une tangente et le coefficient directeur de cette tangente est $f'(0)$.

La dérivée f' de f est de la forme :
$$f' = \frac{-v'}{v^2}$$

Ce qui donne, pour tout réel x :
$$f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$$

En conséquence :
$$f'(0) = -\frac{1}{4}$$

La tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0 est bien parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x$.

Réponse : VRAI

2. Comme G est le barycentre de $\{(A, -1) ; (B, 1) ; (C, 4)\}$, on a pour tout point M du plan :

$$-\overline{MA} + \overline{MB} + 4\overline{MC} = 4\overline{MG}$$

On a donc :
$$\overline{MM'} = 4\overline{MG}$$

Et d'après la relation de Chasles :
$$\overline{MG} + \overline{GM'} = 4\overline{MG}$$

$$\overline{GM'} = 3\overline{MG} = -3\overline{GM}$$



On en déduit que M' est l'image de M par l'homothétie de centre G et de rapport -3 .

Réponse : VRAI

3. On a l'équation :
$$x \sin(3x) = \frac{1}{2}x$$

Factorisons par x :
$$x \left(\sin(3x) - \frac{1}{2} \right) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement l'un des facteurs est nul :

$$x = 0 \text{ ou } \sin(3x) = \frac{1}{2}$$

Intéressons-nous à la dernière équation et posons $X = 3x$:

$$\sin X = \frac{1}{2}$$

D'où :

$$X = \frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ ou } X = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

Autrement dit, il existe des entiers relatifs k et k' tels que :

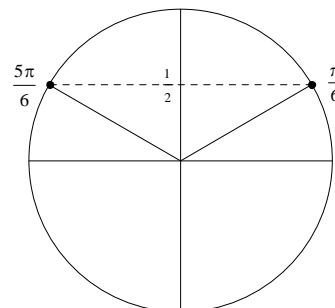
$$3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k'\pi$$

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k'\pi}{3}$$

Conclusion : l'ensemble S des solutions de l'équation $x \sin(3x) = \frac{1}{2}x$ est :

$$S = \left\{ 0 ; \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} ; \frac{5\pi}{18} + \frac{2k'\pi}{3} \text{ où } k, k' \in \mathbb{Z} \right\}$$

Réponse : VRAI



Exercice 2 (5 points)

1. a. Développons :

$$(z - 7\mathbf{i})(z + \mathbf{i})$$

$$z^2 - 6\mathbf{i}z + 7 = 0$$

b. Un point M d'affixe $z \neq 3\mathbf{i}$ est invariant par f si et seulement si :

$$f(z) = z$$

$$(3\mathbf{i}z - 7) = z(z - 3\mathbf{i})$$

$$z^2 - 6\mathbf{i}z + 7 = 0$$

Et d'après la question 1.a. :

$$(z - 7\mathbf{i})(z + \mathbf{i}) = 0$$

$$z = 7\mathbf{i} \text{ ou } z = -\mathbf{i}$$

L'application f admet deux points invariants B et C d'affixes respectives $b = 7\mathbf{i}$ et $c = -\mathbf{i}$.

2. a. Le centre du cercle Σ de diamètre $[BC]$ a pour affixe :

$$\frac{b+c}{2} = 3\mathbf{i}$$

Donc le cercle Σ a pour centre le point A et pour rayon $AB = |7\mathbf{i} - 3\mathbf{i}| = 4$

Comme M est un point de Σ , on a : $AM = 4$

C'est-à-dire : $|z - 3\mathbf{i}| = 4$

Soit θ un argument du nombre complexe $z - 3\mathbf{i}$ (existe car $z \neq 3\mathbf{i}$), ainsi :

$$z - 3\mathbf{i} = 4e^{i\theta}$$

On a montré qu'il existe un réel θ tel que : $z = 3\mathbf{i} + 4e^{i\theta}$

Remarque : réciproquement, tout point $M(z)$ pour lequel il existe un réel θ tel que $z = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{e}^{i\theta}$ appartient au cercle Σ puisque $|z - 3\mathbf{i}| = 4$. La relation $z = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{e}^{i\theta}$ (pour $\theta \in]-\pi ; \pi[$) **caractérise** donc tous les points du cercle Σ .

b. On a alors :
$$z' - 3\mathbf{i} = \frac{3\mathbf{i}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{e}^{i\theta}) - 7}{4\mathbf{e}^{i\theta}} - 3\mathbf{i} = -4\mathbf{e}^{-i\theta} = 4\mathbf{e}^{i(\pi-\theta)}$$

D'où :
$$\begin{aligned} |z' - 3\mathbf{i}| &= 4 \\ AM' &= 4 \\ M' &\in \Sigma \end{aligned}$$

Remarque : on pouvait se passer de la question 2.a. car pour tout $z \neq 3\mathbf{i}$, on a :

$$z' - 3\mathbf{i} = \frac{3\mathbf{i}z - 7}{z - 3\mathbf{i}} - 3\mathbf{i} = -\frac{16}{z - 3\mathbf{i}}$$

D'où, en passant aux modules : $AM' \times AM = 16$

Ainsi, il apparaît que si $AM = 4$ alors $AM' = 4$ également, d'où le résultat.

c. On a vu que : $z = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{e}^{i\theta}$

En conjuguant : $\bar{z} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{e}^{-i\theta} = -z'$

D'où : $z' = -\bar{z}$

Pour construire le point M' , on construit le point M_1 , d'affixe \bar{z} , symétrique de M par rapport à l'axe des réels puis le point M' , d'affixe $-\bar{z}$, symétrique de M_1 par rapport à l'origine O . Ce qui revient plus simplement à dire que M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des imaginaires purs.

3. On reprend les calculs précédents (question 2.b.) avec un rayon $r > 0$ quelconque au lieu de 4.

Soit \mathcal{C} un cercle de centre A et de rayon r . On a donc :

$$M(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow AM = r \Leftrightarrow z - 3\mathbf{i} = r\mathbf{e}^{i\theta}, \theta \in]-\pi ; \pi[$$

On a alors :
$$z' - 3\mathbf{i} = \frac{3\mathbf{i}(3\mathbf{i} + r\mathbf{e}^{i\theta}) - 7}{r\mathbf{e}^{i\theta}} - 3\mathbf{i} = -\frac{16}{r}\mathbf{e}^{-i\theta} = \frac{16}{r}\mathbf{e}^{i(\pi-\theta)}$$

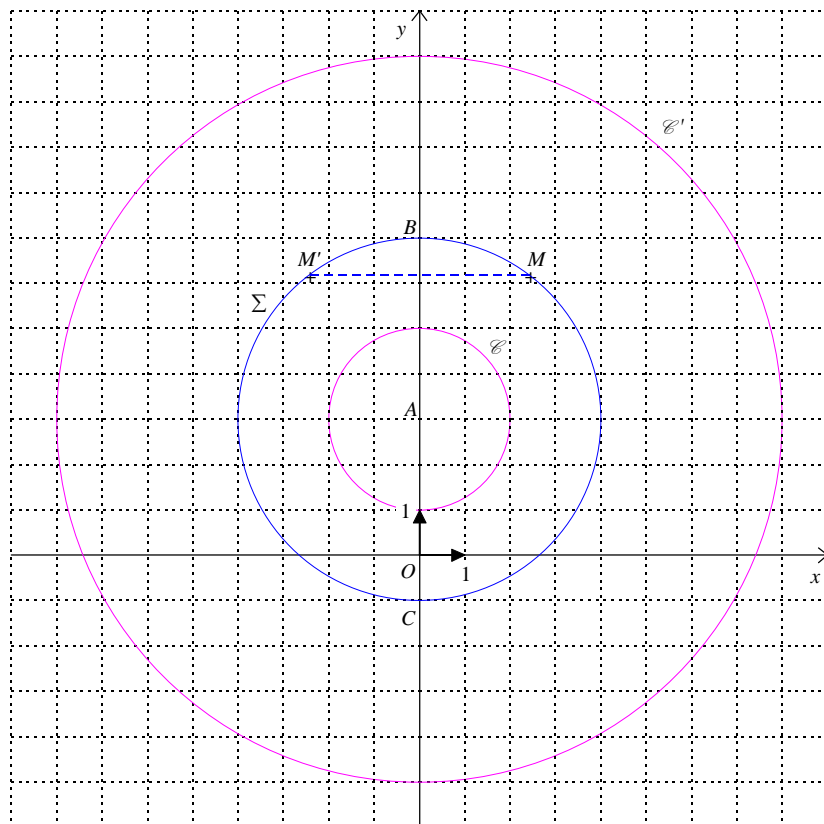
Posons $\theta' = \pi - \theta$, ainsi :
$$z' = 3\mathbf{i} + \frac{16}{r}\mathbf{e}^{i\theta'}$$

Comme $-\pi < \theta \leq \pi$, on a : $0 \leq \theta' < 2\pi$

Or, les points dont l'affixe vérifie $z' = 3\mathbf{i} + \frac{16}{r}\mathbf{e}^{i\theta'}$ avec $\theta' \in [0 ; 2\pi[$ parcourent **tout** le cercle de centre A et de rayon $\frac{16}{r}$.

Conclusion : l'image du cercle \mathcal{C} par f est un cercle \mathcal{C}' de même centre A et de rayon $\frac{16}{r}$.

Figure :



Exercice 2 Spécialité (5 points)

1. a. Supposons que a existe et que a soit pair. Alors a^2 serait pair également.

Comme 2^n est aussi pair (n non nul), on déduirait de la relation $9 = 2^n - a^2$ que 9 serait pair, ce qui est absurde. Conclusion : si a existe, alors a est nécessairement impair

- b. Comme n est supérieur à 2 (puisque supérieur à 4), l'entier 2^n est divisible par 4.

Modulo 4, notre équation s'écrit donc : $a^2 + 9 \equiv 0 \pmod{4}$ [4]

C'est-à-dire : $a^2 \equiv 3 \pmod{4}$ [4]

Dressons la liste des carrés modulo 4 :

a	0	1	2	3
a^2	0	1	0	1

On constate qu'un carré ne peut pas être égal à 3 modulo 4.

L'équation proposée n'a donc pas de solution.

2. a. Distinguons deux cas.

- Si n est pair, alors il existe un entier naturel k tel que :

$$n = 2k$$

On a alors : $3^n = 3^{2k} = 9^k$

D'où : $3^n \equiv 9^k \equiv 1 \pmod{4}$ [4]

- Si n est impair, alors il existe un entier naturel k' tel que :

$$n = 2k + 1$$

On a alors : $3^n = 3^{2k+1} = 9^k \times 3$

D'où : $3^n \equiv 9^k \times 3 \equiv 3 \pmod{4}$

On a bien montré que : 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4

- b. Supposons que a existe et que a soit impair. Alors a^2 serait impair également.

Comme 3^n est aussi impair, on déduirait de la relation $9 = 3^n - a^2$ que 9 serait pair, ce qui est absurde.

Conclusion : si a existe, alors a est nécessairement pair

D'après la liste des carrés modulo 4 (voir question 1.b.) on en déduit :

$$a^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

Donc : $3^n - 9 \equiv 0 \pmod{4}$

$$3^n \equiv 1 \pmod{4}$$

Et d'après la question 3.a. : n est pair

- c. Puisque n est pair (et supérieur à 3), il existe bien un entier p (supérieur à 2) tel que $n = 2p$.

On a alors : $3^n - a^2 = 3^{2p} - a^2 = (3^p - a)(3^p + a)$

D'où : $9 = (3^p - a)(3^p + a)$

Les nombres $3^p - a$ et $3^p + a$ sont donc des diviseurs de 9 et comme $a \in \mathbb{N}^*$, on a $3^p - a < 3^p + a$ d'où :

$$3^p - a = 1 \quad \text{et} \quad 3^p + a = 9$$

En additionnant, il vient : $2 \times 3^p = 10$

$$3^p = 5$$

Ce qui est absurde.

L'équation proposée n'a donc pas de solution.

3. a. Si n est impair alors en notant $n = 2k + 1$, on aurait :

$$5^n \equiv 5^{2k+1} \equiv 25^k \times 5 \equiv 2 \pmod{3}$$

On déduirait de la relation $a^2 = 5^n - 9$ que :

$$a^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

Ce qui est absurde puisqu'un carré modulo 3 ne peut être que 0 ou 1 ($2^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{3}$ et $0^2 \equiv 0 \pmod{3}$)

Donc si l'équation admet une solution a , c'est nécessairement pour un entier n pair.

- b. Factorisons : $5^n - a^2 = 5^{2p} - a^2 = (5^p - a)(5^p + a)$

D'où : $9 = (5^p - a)(5^p + a)$

Les nombres $5^p - a$ et $5^p + a$ sont donc des diviseurs de 9 et comme $a \in \mathbb{N}^*$, on a $5^p - a < 5^p + a$ d'où :

$$5^p - a = 1 \quad \text{et} \quad 5^p + a = 9$$

En additionnant, il vient : $2 \times 5^p = 10$

$$5^p = 5$$

D'où : $p = 1$

L'équation proposée admet donc une unique solution obtenue lorsque $p = 1$:

$$a^2 = 5^2 - 9 = 16$$

Et comme a est positif : $a = 4$

Exercice 3 (4 points)

1. Un vecteur normal au plan \mathcal{P} est : $\vec{n}(2; -1; 0)$

Un vecteur normal au plan \mathcal{P}' est : $\vec{n}'(3; 1; -1)$

Comme ces deux vecteurs sont non colinéaires (car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles), les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont bien sécants suivant une droite \mathcal{D} .

On détermine une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} en résolvant le système :

$$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

Posons $x = \alpha$, ainsi la première équation donne : $y = 2\alpha + 5$

Par ailleurs, en additionnant les deux équations, on obtient :

$$5\alpha + 5 - z = 0$$

$$z = 5\alpha + 5$$

D'où une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha + 5 \\ z = 5\alpha + 5 \end{cases} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

2. Affirmation 1 : VRAI

Une droite \mathcal{D} de vecteur directeur \vec{u} est parallèle à un plan \mathcal{R} de vecteur normal \vec{r} si et seulement si les vecteurs \vec{u} et \vec{r} sont orthogonaux.

Ici, on a : $\vec{u}(1; 2; 5)$ et $\vec{r}(-5; 5; -1)$

On calcule le produit scalaire de ces deux vecteurs :

$$\vec{u} \cdot \vec{r} = -5 + 10 - 5 = 0$$

On constate que les vecteurs \vec{u} et \vec{r} sont orthogonaux donc la droite \mathcal{D} est parallèle au plan \mathcal{R} .

Affirmation 2 : FAUX

Dans l'espace, deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou sécantes.

Un vecteur directeur de \mathcal{D} est : $\vec{u}(1; 2; 5)$

Un vecteur directeur de \mathcal{D}' est : $\vec{u}'(-3; 1; 2)$

Comme \vec{u} et \vec{u}' ne sont pas colinéaires, les deux droites ne sont pas parallèles.

Pour savoir si elles sont sécantes, on résout le système :

$$\begin{cases} \alpha = -3\beta \\ 2\alpha + 5 = 1 + \beta \\ 5\alpha + 5 = 2 + 2\beta \end{cases}$$

En remplaçant α par -3β dans la deuxième équation, on obtient :

$$\beta = \frac{4}{7}$$

En remplaçant α par -3β dans la troisième équation, on obtient :

$$\beta = \frac{3}{17}$$

Comme ces deux dernières conditions ne sont pas compatibles, le système n'a donc pas de solution.

Les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas coplanaires.

Exercice 4 (8 points)

I. Première partie. Étude d'une fonction f .

1. La fonction f est la composée de deux fonctions strictement croissantes ($u : x \mapsto 1 + 2x$ sur I et \ln sur \mathbb{R}_+^*) donc elle est strictement croissante.

On peut aussi dire que f est de la forme $\ln u$. Comme u est dérivable sur I , f l'est aussi (par composition) donc f' sera égale à $\frac{u'}{u}$, quantité qui est strictement positive sur I . Même conclusion.

2. On a :
$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} (1 + 2x) = 0 \text{ avec } 1 + 2x > 0$$

Et :
$$\lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X > 0}} \ln X = -\infty$$

On en déduit :
$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} f(x) = -\infty$$

3. a. La fonction g est dérivable sur I (comme différence de deux fonctions qui le sont) et pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = \frac{2}{1+2x} - 1 = \frac{1-2x}{1+2x}$$

Pour $x \in I$, on a :
$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

La fonction g est donc strictement croissante sur $\left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$.

b. On vérifie que :
$$g(0) = \ln 1 - 0 = 0$$

La fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$. Elle réalise donc une bijection sur cet intervalle. L'équation $g(x) = 0$ n'a donc pas d'autre solution que 0 sur cet intervalle.

La fonction g est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$. Elle réalise donc une bijection sur cet intervalle. L'équation $g(x) = 0$ admet donc au plus une solution β sur cet intervalle. De plus, on a :

$$g(1) = \ln 3 - 1$$

Or, $3 > e$, donc par croissance du logarithme : $\ln 3 > 1$

D'où :
$$g(1) > 0$$

Et :
$$g(2) = \ln 5 - 2$$

Or, $5 < e^2$ (car $\sqrt{5} < e$) donc par croissance du logarithme :

$$\ln 5 < 2$$

$$g(2) < 0$$

On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β dans $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$ avec $\beta \in [1; 2]$.

c. On en déduit le signe de g sur I :

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	β	2	$+\infty$
Variations de g	$-\infty$	↗	→	↘	↘	↘	$-\infty$
Signe de g		-	0	+	0	-	

4. La fonction f est strictement croissante sur $]0 ; \beta[$ donc pour tout réel x de $]0 ; \beta[$, on a :

$$f(0) < f(x) < f(\beta)$$

Or, $f(\beta) = \beta$ et $f(0) = 0$ d'où :

$$0 < f(x) < \beta$$

$$f(x) \in]0 ; \beta[$$

II. Seconde partie. Étude d'une suite récurrente.

1. On considère la propriété \wp définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\wp(n) : u_n \in]0 ; \beta[$$

- On a $u_0 = 1 \in]0 ; \beta[$ car $\beta \geq 1$. (Question I.3.b)

La propriété \wp est donc initialisée au rang 0.

- Soit n un entier naturel quelconque. Supposons $\wp(n)$:

$$u_n \in]0 ; \beta[$$

Et d'après la question I.4. :

$$f(u_n) \in]0 ; \beta[$$

$$u_{n+1} \in]0 ; \beta[$$

La propriété \wp est donc héréditaire à partir du rang 0.

Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit que la propriété \wp est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est-à-dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0 ; \beta[$

2. On considère la propriété Q définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$Q(n) : u_n \leq u_{n+1}$$

- On a $u_1 = f(u_0) = f(1) = \ln 3$. Or $3 > e$, donc $\ln 3 > 1$, c'est-à-dire $u_1 > u_0$.

La propriété Q est donc initialisée au rang 0.

- Soit n un entier naturel quelconque. Supposons $Q(n)$:

$$u_n \leq u_{n+1}$$

Et comme f est croissante :

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1})$$

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

La propriété Q est donc héréditaire à partir du rang 0.

Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit que la propriété Q est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est-à-dire : la suite (u_n) est croissante

Remarque : on pouvait condenser les deux questions précédentes en considérant la propriété :

$$0 < u_n < u_{n+1} < \beta$$

3. La suite (u_n) est croissante et majorée par β donc converge.

III. Troisième partie. Recherche de la limite de la suite (u_n)

1. On a vu que pour tout réel $x \in I$:

$$f'(x) = \frac{2}{2x+1}$$

Pour $x \geq 1$, on a donc :

$$2x + 1 \geq 3$$

Par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* :

$$\frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{3}$$

Et par multiplication par 2 : $f'(x) \leq \frac{2}{3}$

2. a. Il suffit d'intégrer, pour tout entier naturel n , l'inégalité précédente entre u_n et β .

Comme $u_n < \beta$ (question II.1.), on a par conservation de l'ordre :

$$\int_{u_n}^{\beta} f'(t) dt \leq \frac{2}{3} (\beta - u_n)$$

b. Il suffit de calculer, pour tout entier naturel n , l'intégrale ci-dessus :

$$\int_{u_n}^{\beta} f'(t) dt = [f(t)]_{u_n}^{\beta} = f(\beta) - f(u_n) = \beta - u_{n+1}$$

Donc, pour tout entier naturel n : $\beta - u_{n+1} \leq \frac{2}{3} (\beta - u_n)$

Et comme la suite (u_n) est majorée par β (question II.1.) on a même :

$$0 \leq \beta - u_{n+1} \leq \frac{2}{3} (\beta - u_n) \quad (*)$$

Considérons maintenant la propriété H définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$H(n) : 0 \leq \beta - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

• D'après la question I.3.b. : $1 \leq \beta \leq 2$

D'où : $1 - u_0 \leq \beta - u_0 \leq 2 - u_0$

Et comme $u_0 = 1$: $0 \leq \beta - u_0 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$

D'où $H(0)$. La propriété H est bien initialisée au rang 0.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H(n)$: $0 \leq \beta - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

En multipliant par $\frac{2}{3}$: $0 \leq \frac{2}{3} (\beta - u_n) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Et d'après l'inégalité (*) : $0 \leq \beta - u_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Ce qui est $H(n+1)$.

La propriété H est bien héréditaire à partir du rang 0.

Du principe de raisonnement par récurrence on en déduit la propriété H pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \beta - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

c. La suite (q_n) définie par $q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

Comme $\frac{2}{3} \in]-1 ; 1[$, cette suite converge vers 0.

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\beta - u_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \beta$$