Exercice 1 (4 points)

Notons M, S, AT, H et F les événements suivants :

M : "le membre interrogé est un médecin"

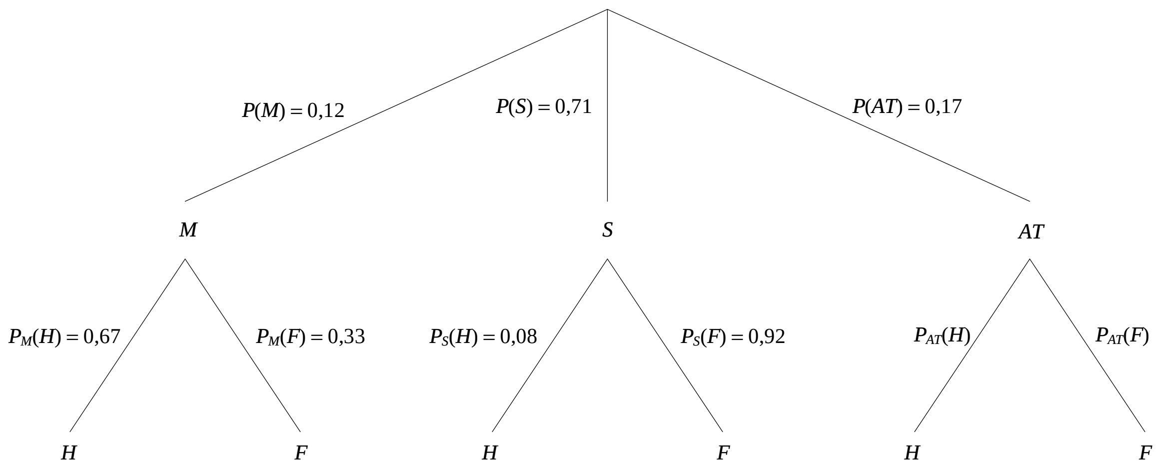
S : "le membre interrogé est un soignant"

AT : "le membre interrogé est un administratif ou technique"

H : "le membre interrogé est un homme"

F : "le membre interrogé est une femme"

Les données de l'énoncé se traduisent par l'arbre suivant :



1. a. Probabilité d'interroger une femme soignante :

$$P(S \cap F) = P_S(F) \times P(S) = 0,92 \times 0,71 = 0,6532$$

b. Probabilité d'interroger une femme médecin :

$$P(M \cap F) = P_M(F) \times P(M) = 0,33 \times 0,12 = 0,0396$$

c. D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition $M \cup S \cup AT$, on a :

$$P(F) = P(M \cap F) + P(S \cap F) + P(AT \cap F)$$

D'où la probabilité d'interroger une femme AT :

$$P(AT \cap F) = P(F) - P(M \cap F) - P(S \cap F)$$

$$P(AT \cap F) = 0,8 - 0,0396 - 0,6532 = 0,1072$$

On en déduit la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne fait partie du personnel AT :

$$P_{AT}(F) = \frac{P(AT \cap F)}{P(AT)} = \frac{0,1072}{0,17} \simeq 0,6306 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$

2. Notons T la variable aléatoire égale au temps du trajet domicile-hôpital de la personne interrogée.

Raisonnons en minutes. Comme T suit une loi uniforme sur $[0 ; 60]$, on a :

$$P(15 \leqslant T \leqslant 20) = \frac{20 - 15}{60} = \frac{1}{12}$$

$$P(15 \leqslant T \leqslant 20) \simeq 0,0833 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$

3. Considérons l'expérience E qui consiste à envoyer le courier publicitaire à une personne parmi les 40.

Nous allons considérer deux issues complémentaires à cette expérience qui sont "le courier arrive à un médecin" (Succès) et son contraire. La probabilité p d'obtenir un succès est :

$$p = P(M) = 0{,}12$$

On répète maintenant $n = 40$ fois l'expérience E de manière indépendante.

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de succès, c'est-a-dire au nombre de lettres qui vont parvenir à un médecin. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètre $n = 40$ et $p = \frac{1}{12}$.

Nous avons donc :

$$P(X = 10) = \binom{40}{10} 0{,}12^{10} \times 0{,}88^{30} \simeq 0{,}0113 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$

Exercice 2 (5 points)

1. On résout : $$(z - 2\mathbf{i})(z^2 - 2z + 2) = 0$$

   Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

   $$z - 2\mathbf{i} = 0 \text{ ou } z^2 - 2z + 2 = 0$$

   On peut calculer le discriminant du trinôme $z^2 - 2z + 2$ ou plus efficacement canoniser puis factoriser :

   $$z^2 - 2z + 2 = (z - 1)^2 + 1 = (z - 1)^2 - \mathbf{i}^2 = (z - 1 - \mathbf{i})(z - 1 + \mathbf{i})$$

   On en déduit les trois solutions complexes de notre équation sous forme algébrique :

   $$S = \{2\mathbf{i} \,;\, 1 + \mathbf{i} \,;\, 1 - \mathbf{i}\}$$

   Donnons ces solutions sous forme exponentielle :

   $$2\mathbf{i} = 2\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}$$

   $$1 + \mathbf{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$$

   De même : $$1 - \mathbf{i} = \sqrt{2}\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$$

2. On a donc, pour tout $z \neq z_A$: $$z' = \frac{z - z_B}{z - z_A}$$

   a. Lorsque $z = z_B$, on a $z' = 0$ qui est bien un imaginaire pur, donc $B \in (E)$.

   Déterminons (E) en utilisant la caractérisation suivante :

   $$z' \text{ imaginaire pur} \iff \left(z' = 0 \text{ ou } \arg(z') = \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right)$$

   $$z' \text{ imaginaire pur} \iff \left(z = z_B \text{ ou } \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right)$$

   z' imaginaire pur $\iff$ ($M = B$ ou M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B)

   z' imaginaire pur $\iff$ M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A

   Conclusion : (E) est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A

   b. Les conditions suivantes sont équivalentes :

   $$|z'| = 1 \text{ et } z \neq z_A$$

   $$AM = BM \text{ et } M \neq A$$

   On en déduit que (F) est la médiatrice du segment $[AB]$.

3. L'écriture complexe de la rotation R est :

$$z' - \left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\mathbf{i}\right) = \mathbf{i}\left(z - \left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\mathbf{i}\right)\right)$$

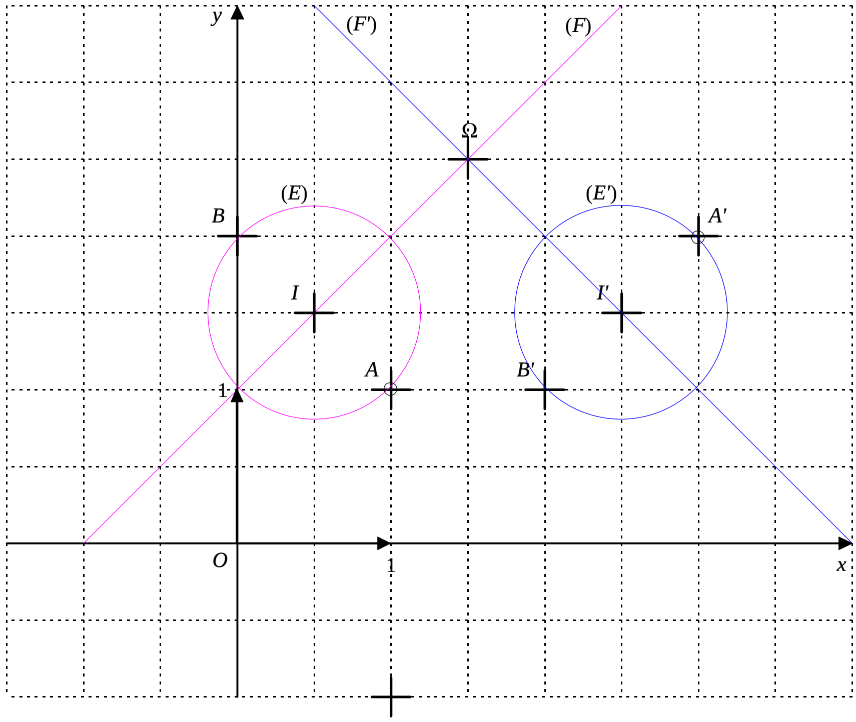
$$z' = \mathbf{i}z + 4 + \mathbf{i}$$

a. Affixe de $B' = R(B)$: $z_{B'} = \mathbf{i}z_B + 4 + \mathbf{i} = 2 + \mathbf{i}$

Affixe de $I' = R(I)$: $z_{I'} = \mathbf{i}z_I + 4 + \mathbf{i} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\mathbf{i}$

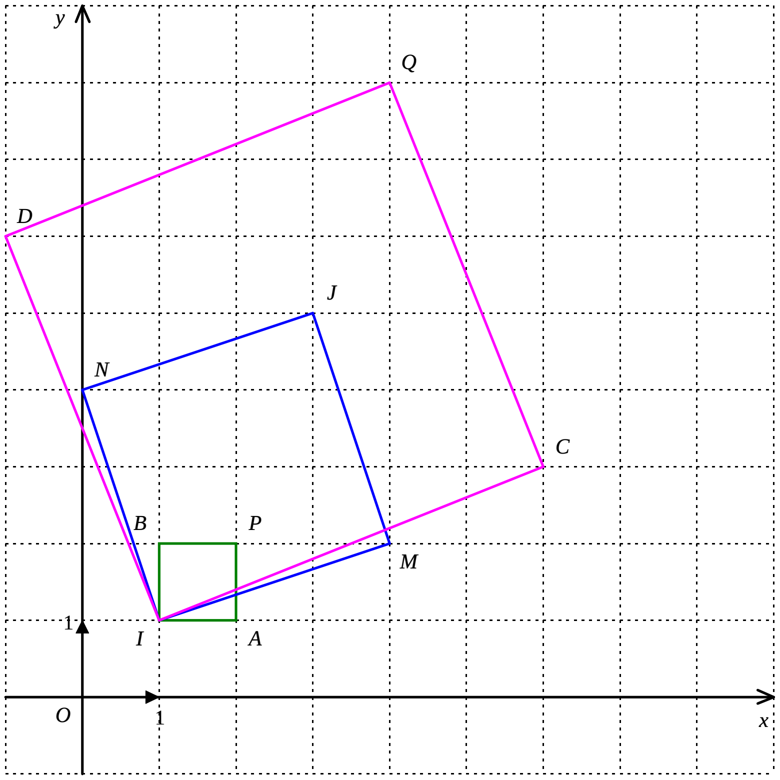
b. On constate facilement que I est le milieu de $[AB]$. L'ensemble (E) est donc le cercle de centre I de diamètre $[AB]$ privé du point A. Son image par R est donc le cercle de même diamètre (une rotation conserve les longueurs) de centre I' et privé du point $A' = R(A)$ d'affixe $3 + 2\mathbf{i}$.

L'image de (F) par R est la médiatrice du segment $[A'B']$.



Exercice 2 *Spécialité* (5 points)

1.



2. L'écriture complexe d'une similitude directe f est de la forme :

$$z' = az + b \quad (\text{où } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C})$$

Comme les points A et C sont distincts, on sait qu'il existe une unique similitude directe f telle que :

$$f(A) = B \text{ et } f(C) = D$$

Expliquons pourquoi : les conditions ci-dessus se traduisent par le système (dont les inconnues sont a et b) :

$$\begin{cases} az_A + b = z_B \\ az_C + b = z_D \end{cases}$$

En retranchant membre à membre : $a(z_A - z_C) = z_B - z_D$

Et comme $A \neq C$, le complexe a existe : $a = \dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_C}$

On en déduit l'existence de b : $b = z_B - az_A$

Ces calculs démontrent que l'existence de f est subordonnée à la condition $A \neq C$. Elle permet de plus de déterminer f. Ici, cela donne :

$$a = \frac{2-4\mathbf{i}}{-4-2\mathbf{i}} = \mathbf{i} \text{ et } b = z_B - \mathbf{i}z_A = 2$$

L'écriture complexe de f est donc : $z' = \mathbf{i}z + 2$ (E_1)

Résolvons l'équation au(x) point(s) fixe(s) : $\omega = \mathbf{i}\omega + 2$ (E_2)

On trouve : $\omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{2}{1-\mathbf{i}} = 1 + \mathbf{i}$

Enfin, en effectuant $(E_1) - (E_2)$, nous obtenons :

$$z' - \omega = \mathbf{i}(z - \omega)$$

Nous reconnaissons l'écriture complexe d'une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de centre $I(1 + \mathbf{i})$

3. L'écriture complexe de R est : $z' - (3 + 5\mathbf{i}) = -\mathbf{i}(z - (3 + 5\mathbf{i}))$

$$z' = -\mathbf{i}z - 2 + 8\mathbf{i}$$

Calculons l'affixe de l'image de A :

$$-\mathbf{i}z_A - 2 - 8\mathbf{i} = -1 + 6\mathbf{i}$$

Donc : $R(A) = D$

Calculons l'affixe de l'image de C :

$$-\mathbf{i}z_C - 2 - 8\mathbf{i} = 1 + 2\mathbf{i}$$

Donc : $R(C) = B$

4. On sait que : $R([AC]) = [DB]$

Par conservation du milieu, il vient : $R(M) = N$

En conséquence, le triangle MJN est rectangle isocèle direct en J.

De même, on sait que : $f([AC]) = [BD]$

Par conservation du milieu, il vient : $f(M) = N$

En conséquence, le triangle MIN est rectangle isocèle indirect en I.

On en déduit que $IMJN$ est un carré (direct).

5. a. P est l'image de I par le quart de tour direct de centre B :

$$z_P - z_B = \mathbf{i}(z_I - z_B)$$

$$z_P = 2 + 2\mathbf{i}$$

(Un calcul était-il vraiment nécessaire vu la configuration ?)

Q est l'image de I par le quart de tour direct de centre D :

$$z_Q - z_D = \mathbf{i}(z_I - z_D)$$

$$z_Q = 4 + 8\mathbf{i}$$

b. Le rapport entre la diagonale d'un carré et son côté est égal à $\sqrt{2}$:

$$\frac{IP}{IA} = \frac{IQ}{IC} = \sqrt{2}$$

L'angle géométrique entre la diagonale d'un carré et son côté est égal à $\dfrac{\pi}{4}$:

$$\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP}\right) = \left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IQ}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Comme A et C sont distincts, il existe une unique similitude g telle que $g(A) = P$ et $g(C) = Q$.

D'après ce qui précède, son centre est I, son rapport est $\sqrt{2}$ et son angle $\dfrac{\pi}{4}$.

c. On a vu que $IMJN$ est un carré direct donc : $g(M) = J$

Par conservation du milieu, on peut en déduire que :

J est le milieu de $[PQ]$

Exercice 3 (4 points)

1. On rappelle les données : $x \in \mathbb{R}_+$ et k entier avec $k > x$

   a. On considère la propriété définie pour $n \geqslant k$ par :

$$\wp(n) : \frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$$

   - Il est clair que l'on a $\wp(k)$ donc la propriété $\wp$ est initialisée au rang k.
   - Soit n un certain entier supérieur ou égal à k. Supposons $\wp(n)$:

     On a alors :

$$\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{k^n}{n!} \times \frac{k}{(n+1)} \overset{\wp(n)}{\leqslant} \frac{k^k}{k!} \times \frac{k}{(n+1)} \overset{n \geqslant k}{\leqslant} \frac{k^k}{k!}$$

     D'où $\wp(n+1)$

     La propriété $\wp$ est donc héréditaire à partir du rang k.

   Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit que la propriété $\wp$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à k :

$$\frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$$

   b. Pour tout entier n supérieur ou égal à k, on a en utilisant la propriété $\wp(n)$:

$$\frac{x^n}{n!} \leqslant \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^n}{n!} \overset{\wp(n)}{\leqslant} \left(\frac{x}{k}\right)^n \frac{k^k}{k!}$$

   c. Puisque x est un réel positif, on a l'encadrement :

$$0 \leqslant \frac{x^n}{n!} \leqslant \left(\frac{x}{k}\right)^n \frac{k^k}{k!}$$

   Par ailleurs, on $k > x \geqslant 0$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n = 0$

   Du théorème des gendarmes, on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

   Remarque : si on sait que $\mathbf{e}^x = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ (ce qui peut faire l'objet d'un exercice), on en déduit immédiatement ce résultat puisque le terme général d'une série convergente tend nécessairement vers 0.

2. a. Écrivons, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\frac{n^{n-1}}{n!} = \frac{n}{1} \times \frac{n}{2} \times \ldots \times \frac{n}{n-1} \times \frac{1}{n} = \frac{n}{2} \times \ldots \times \frac{n}{n-1}$$

   Comme chacun des $n - 1$ facteurs de ce produit est supérieur ou égal à 1, on a bien :

$$\frac{n^{n-1}}{n!} \geqslant 1$$

   En multipliant cette inégalité par $n \geqslant 2$: $\frac{n^n}{n!} \geqslant n$

   D'où, par comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

Exercice 4 (7 points)

1. Limite de f en $+\infty$:

On a : $$\lim_{x\to+\infty} (\mathbf{e}^{x}+1) = +\infty$$

Donc, par inverse : $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathbf{e}^{x}+1} = 0$$

En multipliant par 2 : $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\mathbf{e}^{x}+1} = 0$$

Par ailleurs : $$\lim_{x\to+\infty} (x+\ln 4) = +\infty$$

Donc, par somme : $$\lim_{x\to+\infty} \left(x+\ln 4+\frac{2}{\mathbf{e}^{x}+1}\right) = +\infty$$

Limite de f en $-\infty$:

On a : $$\lim_{x\to-\infty} (\mathbf{e}^{x}+1) = 1$$

D'où : $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\mathbf{e}^{x}+1} = \frac{1}{2}$$

Par ailleurs : $$\lim_{x\to-\infty} (x+\ln 4) = -\infty$$

Donc, par somme : $$\lim_{x\to-\infty} \left(x+\ln 4+\frac{2}{\mathbf{e}^{x}+1}\right) = -\infty$$

2. Pour tout réel x, on a :

$$f(x)+f(-x) = \left(x+\ln 4+\frac{2}{\mathbf{e}^{x}+1}\right)+\left(-x+\ln 4+\frac{2}{\mathbf{e}^{-x}+1}\right)$$

$$f(x)+f(-x) = 2\ln 4 + 2\frac{\mathbf{e}^{-x}+1+\mathbf{e}^{x}+1}{(\mathbf{e}^{x}+1)(\mathbf{e}^{-x}+1)}$$

$$f(x)+f(-x) = 2\ln 4 + 2$$

Autrement dit : $$\frac{f(x)+f(-x)}{2} = 1+\ln 4$$

Interprétation : soit $M(x, f(x))$ un point de la courbe (C) et $M'(x', y')$ son symétrique par rapport au point A.

Comme A est le milieu de $[MM']$, il vient :

$$\begin{cases} \dfrac{x+x'}{2} = x_A = 0 \\ \dfrac{f(x)+y'}{2} = y_A = 1+\ln 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -x \\ \dfrac{f(x)+y'}{2} = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = f(-x) \end{cases}$$

Les coordonnées du point M' sont donc : $(-x\,;\,f(-x))$

Donc : $M' \in (C)$

On a montré que pour tout point M de (C), son symétrique M' par rapport à A est aussi sur (C).

La courbe (C) admet donc le point A pour centre de symétrie.

3. La fonction f est du type : $\qquad f = u + \dfrac{2}{v} \qquad$ où $\begin{cases} u(x) = x + \ln 4 \\ v(x) = \mathbf{e}^x + 1 \end{cases}$

Comme les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et v non nulle sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f' = u' - 2\frac{v'}{v^2}$$

Ce qui donne, pour tout réel x : $\qquad f'(x) = 1 - \dfrac{2\mathbf{e}^x}{(\mathbf{e}^x + 1)^2}$

On réduit au même dénominateur afin d'étudier plus facilement le signe de f' :

$$f'(x) = \frac{\mathbf{e}^{2x} + 2\mathbf{e}^x + 1 - 2\mathbf{e}^x}{(\mathbf{e}^x + 1)^2} = \frac{\mathbf{e}^{2x} + 1}{(\mathbf{e}^x + 1)^2}$$

Comme l'exponentielle est une fonction strictement positive, on en déduit que pour tout réel x :

$$f'(x) > 0$$

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Résumons les informations des questions 1 et 3 dans un tableau :

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de f'		$+$	
Variations de la fonction f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. a. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et l'image de $\mathbb{R}$, par f, est $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de bijection, on en déduit que pour tout réel m, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

b. On localise grossièrement la solution a à l'aide du graphique (ou de la calculatrice), on remarque que $1 < a < 2$ et on recherche un encadrement plus fin en effectuant un balayage :

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$f(x)$	2,92	2,99	3,05	3,11	...	...

Un encadrement de a à 10^{-1} près est :

$$1{,}1 < a < 1{,}2$$

En effet, $\qquad f(1{,}1) < 3$ et $f(1{,}2) > 3$

c. On a vu que pour tout réel x : $\qquad f(x) + f(-x) = 2 \ln 4 + 2$

En spécialisant $x = a$: $\qquad f(a) + f(-a) = 2 \ln 4 + 2$

Mais comme $f(a) = 3$: $\qquad f(-a) = 2 \ln 4 - 1$

Le réel $-a$ est donc l'unique solution de l'équation $f(x) = m$ avec $m = 2 \ln 4 - 1$.

5. a. En réduisant au même dénominateur la quantité suivante :

$$2 - \frac{2\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x+1} = \frac{2}{\mathbf{e}^x+1}$$

On en déduit que, pour tout réel x :

$$x + 2 + \ln 4 - \frac{2\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x+1} = x + \ln 4 + \frac{2}{\mathbf{e}^x+1} = f(x)$$

b. Étudions, la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de la quantité :

$$f(x) - (x + \ln 4) = \frac{2}{\mathbf{e}^x+1}$$

D'où :

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x + \ln 4)] = 0$$

La droite (Δ) d'équation $y = x + \ln 4$ est bien une asymptote oblique à la courbe en $+\infty$.

De même, en utilisant le résultat de la question 5.a. :

$$f(x) - (x + 2 + \ln 4) = -\frac{2\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x+1}$$

Et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^x = 0$, nous en déduisons :

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x + 2 + \ln 4)] = 0$$

La droite (Δ') d'équation $y = x + 2 + \ln 4$ est bien une asymptote oblique à la courbe en $-\infty$.

Enfin, l'exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, nous avons :

$$\frac{2}{\mathbf{e}^x+1} > 0$$

$$f(x) - (x + \ln 4) > 0$$

Ce qui prouve que la courbe (C) est au dessus de son asymptote (Δ)

6. a. L'intégrale $I(\alpha)$ représente l'aire délimitée par la courbe (C), son asymptote (Δ) et les deux droites verticales d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$ (exprimée en unités d'aires)

b. En utilisant le résultat de la question 5.a., nous avons :

$$I(\alpha) = 2\int_0^\alpha \left(1 - \frac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x+1}\right)\mathrm{d}x = 2\left[x - \ln(\mathbf{e}^x+1)\right]_0^\alpha = 2[\alpha - \ln(\mathbf{e}^\alpha + 1) + \ln 2] = 2[\ln(\mathbf{e}^\alpha) - \ln(\mathbf{e}^\alpha + 1) + \ln 2]$$

$$I(\alpha) = 2\ln\left(\frac{2\mathbf{e}^\alpha}{\mathbf{e}^\alpha+1}\right)$$

c. On résout l'équation :

$$I(\alpha) = 1$$

$$\ln\left(\frac{2\mathbf{e}^\alpha}{\mathbf{e}^\alpha+1}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2\mathbf{e}^\alpha}{\mathbf{e}^\alpha+1} = \sqrt{\mathbf{e}}$$

$$2\mathbf{e}^\alpha = \sqrt{\mathbf{e}}\,(\mathbf{e}^\alpha + 1)$$

$$\mathbf{e}^\alpha\left(2 - \sqrt{\mathbf{e}}\right) = \sqrt{\mathbf{e}}$$

Et comme $2-\sqrt{\mathbf{e}} \neq 0$: $$\mathbf{e}^{\alpha} = \frac{\sqrt{\mathbf{e}}}{2-\sqrt{\mathbf{e}}}$$

Et comme $2-\sqrt{\mathbf{e}} > 0$: $$\alpha = \ln\left(\frac{\sqrt{\mathbf{e}}}{2-\sqrt{\mathbf{e}}}\right) = \frac{1}{2} - \ln\left(2-\sqrt{\mathbf{e}}\right)$$

$$\alpha \simeq 1{,}5 \text{ à } 10^{-1} \text{ près}$$