Exercice 1 (4 points)

1. Puisque X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on a :

$$P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda \mathbf{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathbf{e}^{-\lambda t}\right]_0^a = 1 - \mathbf{e}^{-\lambda a}$$

D'où : $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = \mathbf{e}^{-\lambda a}$

Or, par hypothèse : $P(X > 10) = 0{,}286$

On en déduit : $\mathbf{e}^{-10\lambda} = 0{,}286$

$$\lambda = -\frac{\ln(0{,}286)}{10} \simeq 0{,}125 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

2. La probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois est :

$$P(X \leqslant 0{,}5) = 1 - \mathbf{e}^{-\frac{\lambda}{2}} \simeq 0{,}061 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

3. Il s'agit de calculer :

$$P_{(X \geqslant 8)}(X \geqslant 10)$$

Sachant que X suit la loi de durée de vie sans vieillissement, on a tout simplement :

$$P_{(X \geqslant 8)}(X \geqslant 10) = P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = \mathbf{e}^{-2\lambda} \simeq 0{,}779 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

4. On considère l'expérience E qui consiste à examiner l'un des quinze oscilloscopes.

On note S (comme succès) l'événement "cet oscilloscope a une durée de vie supérieure à 10 ans".

La probabilité p de S est : $p = P(X > 10) = 0{,}286$

On répète $n = 15$ fois, de manière indépendante, l'expérience E et on note Y le nombre de succès obtenus, c'est-à-dire le nombre d'oscilloscopes qui aurons une durée de vie supérieure à 10 ans.

Alors la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}286$.

Ainsi, nous pouvons calculer la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - 0{,}286)^{15} \simeq 0{,}994 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

<u>Remarque</u> : il n'était pas nécessaire de modéliser cette question avec la loi binomiale puisque la probabilité de répétition de 15 événements indépendants et identiques de probabilité q est donnée par q^{15}.

5. Soit n le nombre d'oscilloscope à acheter. En reprenant le raisonnement précédent, la variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres n inconnu et $p = 0{,}286$. Nous devons résoudre l'inéquation :

$$P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}999$$

$$1 - (1 - 0{,}286)^n \geqslant 0{,}999$$

$$0{,}714^n \leqslant 0{,}001$$

Et par croissance du logarithme : $n \ln 0{,}714 \leqslant \ln 0{,}001$

Et puisque $\ln 0{,}714 < 0$: $n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}714}$

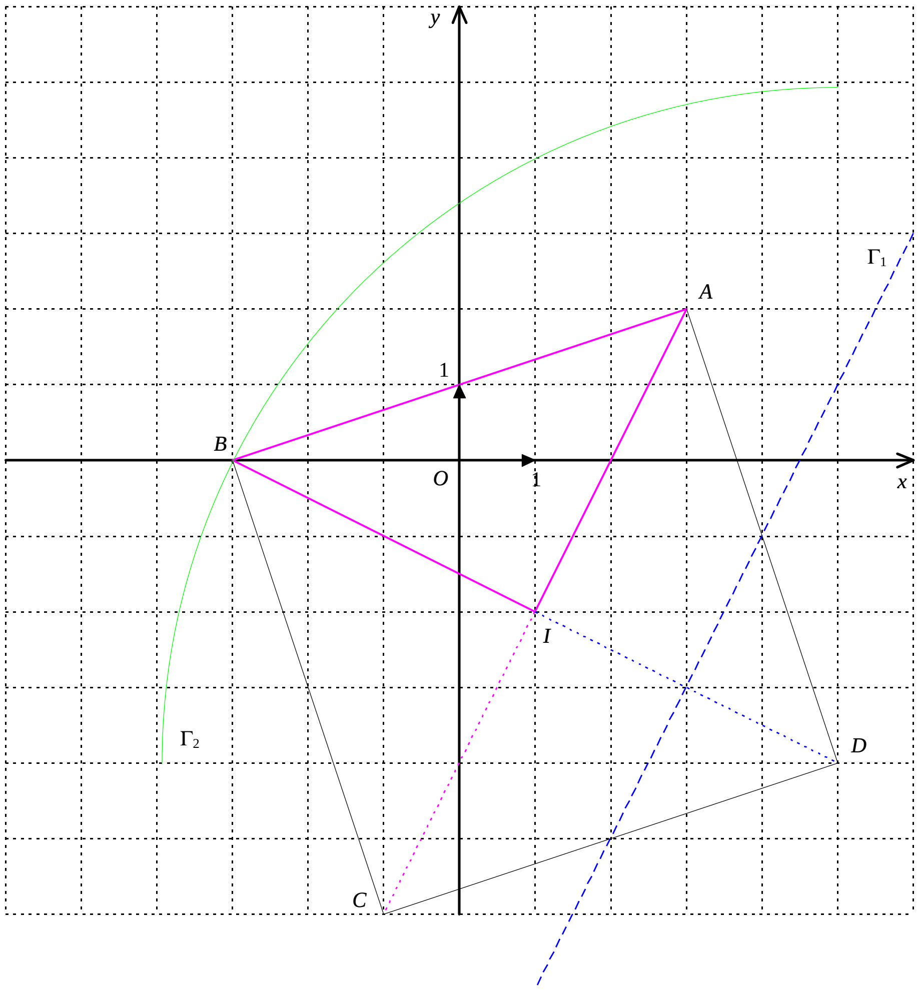
Or, $\dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}714} \simeq 20{,}5$ et n est un entier naturel donc :

$$n \geqslant 21$$

L'établissement doit acheter au moins 21 oscilloscopes pour être sûr à 99,9% qu'au moins l'un d'entre eux dure au moins 10 ans.

Exercice 2 (5 points)

1. a. Figure



b. On a :
$$Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = \frac{(1-2\mathbf{i})-(3+2\mathbf{i})}{(1-2\mathbf{i})-(-3)} = \frac{-2-4\mathbf{i}}{4-2\mathbf{i}} = -\mathbf{i}$$

On en déduit en passant aux modules que :

$$AI = BI$$

Et en passant aux arguments : $\left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{AI}\right) = -\frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

Ce qui signifie que *IAB* est un triangle rectangle isocèle en *I*.

Remarque : on pouvait aussi remarquer que :

$$z_A - z_I = -\mathbf{i}(z_B - z_I)$$

Le point *A* est l'image de *B* par le quart de tour indirect de centre *I*. On conclut comme ci-dessus.

c. L'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport 2 est :

$$z' - z_A = 2(z - z_A)$$

$$z' = 2(z - (3 + 2\mathbf{i})) + 3 + 2\mathbf{i}$$

$$z' = 2z - 3 - 2\mathbf{i}$$

On en déduit l'affixe z_C du point $C = h(I)$:

$$z_C = 2z_I - 3 - 2\mathbf{i} = -1 - 6\mathbf{i}$$

d. L'affixe z_D du point D barycentre du système $\{(A,\ 1),\ (B,\ -1),\ (C,\ 1)\}$ est donnée par la moyenne pondérée des affixes de A, B et C :

$$z_D = \frac{z_A - z_B + z_C}{1-1+1} = 5 - 4\mathbf{i}$$

e. Montrons que IDC est un triangle rectangle isocèle en I :

$$\mathbf{i}(z_C - z_I) = \mathbf{i}(-2 - 4\mathbf{i}) = 4 - 2\mathbf{i} = z_D - z_I$$

Donc D est l'image de C par le quart de tour direct de centre I.

Le triangle IDC est bien rectangle isocèle en I.

Par ailleurs $IA = IC$ (puisque I est le milieu de $[AC]$) donc $IB = ID$.

Le quadrilatère $ABCD$ a ses diagonales perpendiculaires, de même longueur et qui se coupent en leur milieu, c'est donc un carré.

2. À l'aide du barycentre D défini ci-dessus, on a :

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$$

À l'aide du milieu I de $[AC]$, on a :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MI}$$

Γ_1 est ainsi l'ensemble des points M tels que :

$$\|\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MI}\|$$

c'est-à-dire la médiatrice du segment $[DI]$.

3. a. On a vu que : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$

Calculons : $BD^2 = |z_D - z_B|^2 = |8 - 4\mathbf{i}|^2 = 80$

$$BD = 4\sqrt{5}$$

Donc : $B \in \Gamma_2$

b. L'ensemble Γ_2 est caractérisé par : $\|\overrightarrow{MD}\| = 4\sqrt{5}$

Il s'agit donc du cercle de centre D et de rayon $4\sqrt{5}$. (Et ce cercle passe par B ce qui permet de le construire facilement)

Exercice 3 (6 points)

1. a. La fonction f_k est de la forme : $f_k = w + \dfrac{u_k}{v_k}$ avec $\begin{cases} w(x) = x \\ u_k(x) = 1 - k\mathbf{e}^x \\ v_k(x) = 1 + k\mathbf{e}^x \end{cases}$

Comme les fonctions w, u_k et v_k sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que v_k est strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'_k = w' + \frac{u'_k v_k - u_k v'_k}{v_k^2}$$

Ce qui donne, pour tout réel x :

$$f'_k(x) = 1 + \frac{-k\mathbf{e}^x\left(1+k\mathbf{e}^x\right) - \left(1-k\mathbf{e}^x\right)k\mathbf{e}^x}{\left(1+k\mathbf{e}^x\right)^2} = 1 + \frac{-2k\mathbf{e}^x}{\left(1+k\mathbf{e}^x\right)^2}$$

$$2\,f'_k(x) - 1 = 1 - \frac{4k\mathbf{e}^x}{\left(1+k\mathbf{e}^x\right)^2}$$

En réduisant au même dénominateur :

$$2\,f'_k(x) - 1 = \frac{\left(1+k\mathbf{e}^x\right)^2 - 4k\mathbf{e}^x}{\left(1+k\mathbf{e}^x\right)^2} = \left(\frac{1-k\mathbf{e}^x}{1+k\mathbf{e}^x}\right)^2 = \left(f_k(x) - x\right)^2$$

La fonction f_k est bien solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle :

$$2y' = (y - x)^2 + 1$$

b. On en déduit que f'_k est strictement positive sur $\mathbb{R}$ puis que f_k est stictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Le réel k associé à la courbe C passant par l'origine O du repère se détermine avec la condition :

$$f_k(0) = 0$$

$$\frac{1-k}{1+k} = 0$$

$$k = 1$$

Le réel k' associé à la courbe C' passant par le point A de coordonnées (1 ; 1) se détermine avec la condition :

$$f_{k'}(1) = 1$$

$$1 + \frac{1-k'\mathbf{e}}{1+k'\mathbf{e}} = 1$$

$$2 = 1 + k'\mathbf{e}$$

$$k' = \frac{1}{\mathbf{e}}$$

3. Les relations (1) et (2) se démontrent facilement à l'aide d'une réduction au même dénominateur.

Comme $k \geqslant 0$ et pour tout réel x, $\mathbf{e}^x > 0$, on a :

$$f_k(x) - (x - 1) \geqslant 0$$

$$f_k(x) - (x + 1) \leqslant 0$$

La courbe C_k est donc située au dessus de la droite D d'équation $y = x - 1$ et en dessous de la droite D' d'équation $y = x + 1$.

Par ailleurs, on a : $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+k\mathbf{e}^x} = 0$$

Autrement dit : $$\lim_{x\to+\infty} [f_k(x) - (x-1)] = 0$$

Donc la droite D est asymptote oblique à la courbe C en $+\infty$.

De plus : $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2k\mathbf{e}^x}{1+k\mathbf{e}^x} = 0$$

$$(\text{car } \lim_{x\to-\infty} \mathbf{e}^x = 0)$$

Autrement dit : $$\lim_{x\to-\infty} [f_k(x) - (x+1)] = 0$$

Donc la droite D' est asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$.

4. Cas particulier $k = 1$. On a donc : $$f_1(x) = x + \frac{1-\mathbf{e}^x}{1+\mathbf{e}^x}$$

Cette fonction est représentée par la courbe C qui passe par l'origine O du repère (question 2).

a. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ qui est un ensemble symétrique par rapport à 0 et pour tout réel x, on a :

$$f_1(-x) = -x + \frac{1-\mathbf{e}^{-x}}{1+\mathbf{e}^{-x}} = -x + \frac{\mathbf{e}^x-1}{\mathbf{e}^x+1} = -x - \frac{1-\mathbf{e}^x}{1+\mathbf{e}^x} = -f_1(x)$$

(On a multiplié numérateur et dénominateur de la fraction par $\mathbf{e}^x$)

La fonction f_1 est bien impaire.

b. On sait que la fonction f_1 est strictement croissante et que sa courbe représentative C passe par l'origine du repère. Donc la fonction f_1 est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$.

Lorsque $x > 0$, le réel $F(x)$ représente donc l'aire du domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites verticales passant par les points d'abscisses 0 et x.

Lorsque $x < 0$, le réel $\int_x^0 f_1(t)\,\mathrm{d}t = -F(x)$ représente l'**opposé** (car f_1 négative sur $[x\ ;\ 0]$) de l'aire du domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites verticales passant par les points d'abscisses x et 0, donc $F(x)$ représente aussi l'aire susmentionnée.

Autrement dit, F est une fonction paire.

c. Comme f_1 est positive sur $\mathbb{R}_+$, la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Et comme F est paire, elle est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

d. A l'aide de la relation (2), on a :

$$f_1(x) = x + 1 - \frac{2\mathbf{e}^x}{1+\mathbf{e}^x}$$

La fonction f_1 est de la forme : $f_1 = v - 2\dfrac{u'}{u}$ avec $\begin{cases} u(x) = 1+\mathbf{e}^x \\ v(x) = x+1 \end{cases}$

Les primitives F_1 de f_1 sont définies, sur $\mathbb{R}$, par :

$$F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + K - 2\ln(1+\mathbf{e}^x)$$ où K est une constante

Or, la fonction F est la primitive de f_1 qui s'annule en 0, ce qui permet de calculer $K = 2\ln 2$.

D'où : $$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2\ln 2 - 2\ln(1+\mathbf{e}^x)$$

Exercice 4 (5 points)

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel t compris entre 0 et 1, on a :

$$0 < 1 + n + t < 2 + n + t$$

Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit :

$$\frac{1}{2+n+t} < \frac{1}{1+n+t}$$

En multipliant par $\mathbf{e}^{-t^2} > 0$: $$\frac{\mathbf{e}^{-t^2}}{2+n+t} < \frac{\mathbf{e}^{-t^2}}{1+n+t}$$

Et en intégrant entre 0 et 1, il vient : $I_{n+1} < I_n$

Ce raisonnement étant valable pour tout entier naturel n, on en déduit la stricte décroissance de la suite (I_n).

b. Cela découle du fait que pour tout entier naturel n et tout réel t :

$$0 < \frac{\mathbf{e}^{-t^2}}{1+n+t}$$

L'intégrale entre 0 et 1 conservant le sens de l'inégalité, la suite (I_n) est positive.

c. On a : $-t^2 \leqslant 0$

Et par croissance de l'exponentielle : $\mathbf{e}^{-t^2} \leqslant 1$

Et comme $1 + t + n > 0$: $$\frac{\mathbf{e}^{-t^2}}{1+n+t} \leqslant \frac{1}{1+n+t} \overset{t\geqslant 0}{\leqslant} \frac{1}{1+n}$$

d. En intégrant l'inégalité précédente entre 0 et 1 et tenant compte que (I_n) est positive :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{1+n}$$

Et d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite (I_n) converge vers 0.

2. a. La fonction f est dérivable pour tout x de $[0 ; 1]$ et on a :

$$f'(x) = 1 - \mathbf{e}^{-x}$$

Et comme $-x \leqslant 0$, on a $\mathbf{e}^{-x} \leqslant 1$ d'où : $f'(x) \geqslant 0$

La fonction f est croissante sur $[0 ; 1]$.

De plus $f(0) = 0$, donc f est positive sur $[0 ; 1]$

b. De même, g est dérivable pour tout x de $[0 ; 1]$ et on a :

$$g'(x) = f(x)$$

Comme f est positive sur $[0 ; 1]$, g est croissante sur $[0 ; 1]$.

c. Nous avons de plus : $g(0) = 0$

On en déduit que g est positive sur $[0 ; 1]$.

De la positivité de f et g sur $[0 ; 1]$, on déduit :

$$1 - x \leqslant \mathbf{e}^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

d. En remplaçant x par t^2, on obtient l'encadrement :

$$1 - t^2 \leqslant \mathbf{e}^{-t^2} \leqslant 1 - t^2 + \frac{t^4}{2}$$

e. En divisant par $1 + n + t$: $$\frac{1-t^2}{1+n+t} \leqslant \frac{\mathbf{e}^{-t^2}}{1+n+t} \leqslant \frac{1-t^2+\frac{t^4}{2}}{1+n+t}$$

Et comme $0 \leqslant t \leqslant 1$: $$\frac{1-t^2}{2+n} \leqslant \frac{\mathbf{e}^{-t^2}}{1+n+t} \leqslant \frac{1-t^2+\frac{t^4}{2}}{1+n}$$

En intégrant entre 0 et 1 :

$$\frac{1}{2+n}\int_0^1 \left(1-t^2\right)\mathrm{d}t \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{1+n}\int_0^1 \left(1-t^2+\frac{t^4}{2}\right)\mathrm{d}t$$

Or : $$\int_0^1 \left(1-t^2\right)\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \left(1-t^2+\frac{t^4}{2}\right)\mathrm{d}t = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{10} = \frac{23}{30}$$

D'où $$\frac{2}{3(2+n)} \leqslant I_n \leqslant \frac{23}{30(1+n)}$$

f. Pour que la condition $I_p \leqslant 10^{-2}$ soit satisfaite, **il suffit** que $\frac{23}{30(1+p)} \leqslant 10^{-2}$, c'est-à-dire :

$$30(1 + p) \geqslant 2300$$

$$30p \geqslant 2270$$

$$p \geqslant \frac{2270}{30}$$

La valeur $p = 76$ est satisfaisante.