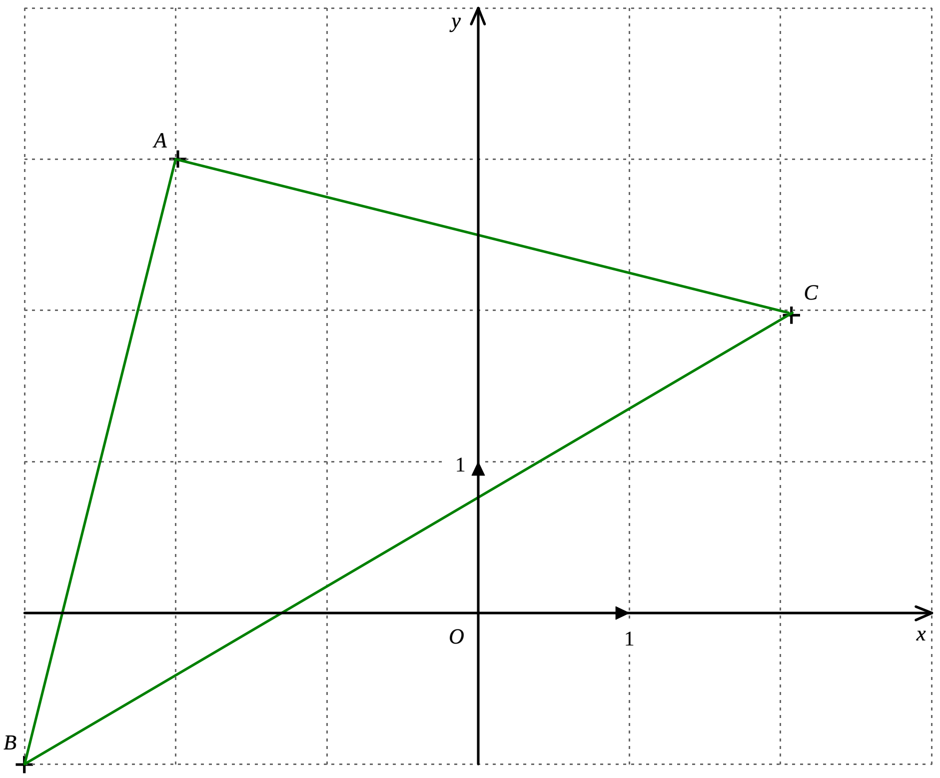
Exercice 1 (4 points)

Bien qu'aucune justification ne soit demandée dans cet exercice,

on donne dans un but pédagogique quelques explications.

1. On commence par faire une figure pour émettre une conjecture puis on vérifie par le calcul.

   Notons $a = -2 + 3\mathbf{i}$, $b = -3 - \mathbf{i}$ et $c = 2{,}08 + 1{,}98\mathbf{i}$ les affixes respectives de A, B et C.



D'après la figure, il semble bien que le triangle ABC ne soit pas isocèle (il aurait fallu que le point C ait pour affixe $c = 2 + 2\mathbf{i}$) et est peut-être rectangle en A.

Contrôle de l'orthogonalité des droites (AB) et (AC) :

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{4{,}08 - 1{,}02\mathbf{i}}{-1-4\mathbf{i}} = \frac{(4{,}08-1{,}02\mathbf{i})(-1+4\mathbf{i})}{(-1-4\mathbf{i})(-1+4\mathbf{i})} = \frac{-4{,}08+4{,}32\mathbf{i}+1{,}02\mathbf{i}+4{,}08}{(-1-4\mathbf{i})(-1+4\mathbf{i})} = \frac{5{,}34\mathbf{i}}{17}$$

Comme $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un imaginaire pur, on a : $(AB) \perp (AC)$

On peut aussi obtenir ce résultat en utilisant le produit scalaire puisque :

$$\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}-1\\-4\end{matrix}\right. . \ \overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix}4{,}08\\-1{,}02\end{matrix}\right. = -4{,}08 + 4{,}08 = 0$$

Le triangle ABC est donc rectangle en A.

Calcul des longueurs : $AB = |b - a| = |-1 - 4\mathbf{i}| = \sqrt{17} \simeq 4{,}12$ à 10^{-2} près

$$AC = |c-a| = |4{,}08 - 1{,}02\mathbf{i}| = \sqrt{\left(\frac{204}{50}\right)^2 + \left(\frac{51}{50}\right)^2} = \frac{\sqrt{44217}}{50} = \frac{\sqrt{3^2 \times 17^3}}{50} = \frac{51\sqrt{17}}{50} \simeq 4{,}21 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

Le triangle ABC n'est donc pas isocèle.

Conclusion : **Réponse (b) : rectangle et non isocèle**

2. Notons A le point d'affixe $a = 4\mathbf{i}$ et B le point d'affixe $b = -2$. On a ainsi :

$$z' = \frac{z-a}{z-b}$$

L'ensemble des points M d'affixe z' tel que $z \neq -2$ et $|z'| = 1$ est donc tel que :

$$z \neq -2 \quad \text{et} \quad |z - a| = |z - b|$$

En interprétant géométriquement : $\quad M \neq B \quad \text{et} \quad AM = BM$

L'ensemble recherché est donc la médiatrice du segment $[AB]$.

Réponse (b) : une droite

> Note : il n'y a pas lieu de priver la médiatrice d'un point. En effet, le point d'affixe -2 n'est pas sur la médiatrice du segment $[AB]$.

3. Le nombre complexe z' est réel si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z \neq b \quad \text{et} \quad \frac{z-a}{z-b} = k$$

Ce qui se traduit géométriquement par : $M \neq B$ et $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{BM}$

Autrement dit : $\quad M \in (AB) \setminus \{B\}$

Variante : $\quad z' \text{ est réel} \iff (z' = 0 \text{ ou } \arg(z') = 0\ [\pi])$

$$z' \text{ réel} \iff \left(z = a \text{ ou } \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0\ [\pi],\ z \neq a,\ z \neq b\right)$$

$$z' \text{ réel} \iff \left(M = A \text{ ou } \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = 0\ [\pi],\ M \neq A,\ M \neq B\right)$$

$$z' \text{ réel} \iff (M = A \text{ ou } M \in (AB) \setminus \{A\,;\,B\})$$

$$z' \text{ réel} \iff (M \in (AB) \setminus \{B\})$$

Réponse (c) : une droite privée d'un point

> Rappel : le nombre complexe nul n'a pas d'argument !

> Rappel : un angle orienté n'a de sens que lorsque les vecteurs sont non nuls !

4. L'écriture complexe de la rotation de centre $D(\mathbf{i})$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ est :

$$z' - \mathbf{i} = \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}(z - \mathbf{i}) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right)(z - \mathbf{i}) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right)z - \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right)z + \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Réponse (a)

Exercice 2 (6 points)

1. La fonction f est de la forme : $\quad f = \dfrac{u}{v} \quad$ où $\begin{cases} u(x) = 2x+1 \\ v(x) = x+1 \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0\,;\,2]$ (puisque affines), donc f l'est également et on a :

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Comme f' est strictement positive sur $[0\,;\,2]$, f est strictement croissante sur $[0\,;\,2]$.

Soit $x \in [1\,;\,2]$: $\quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

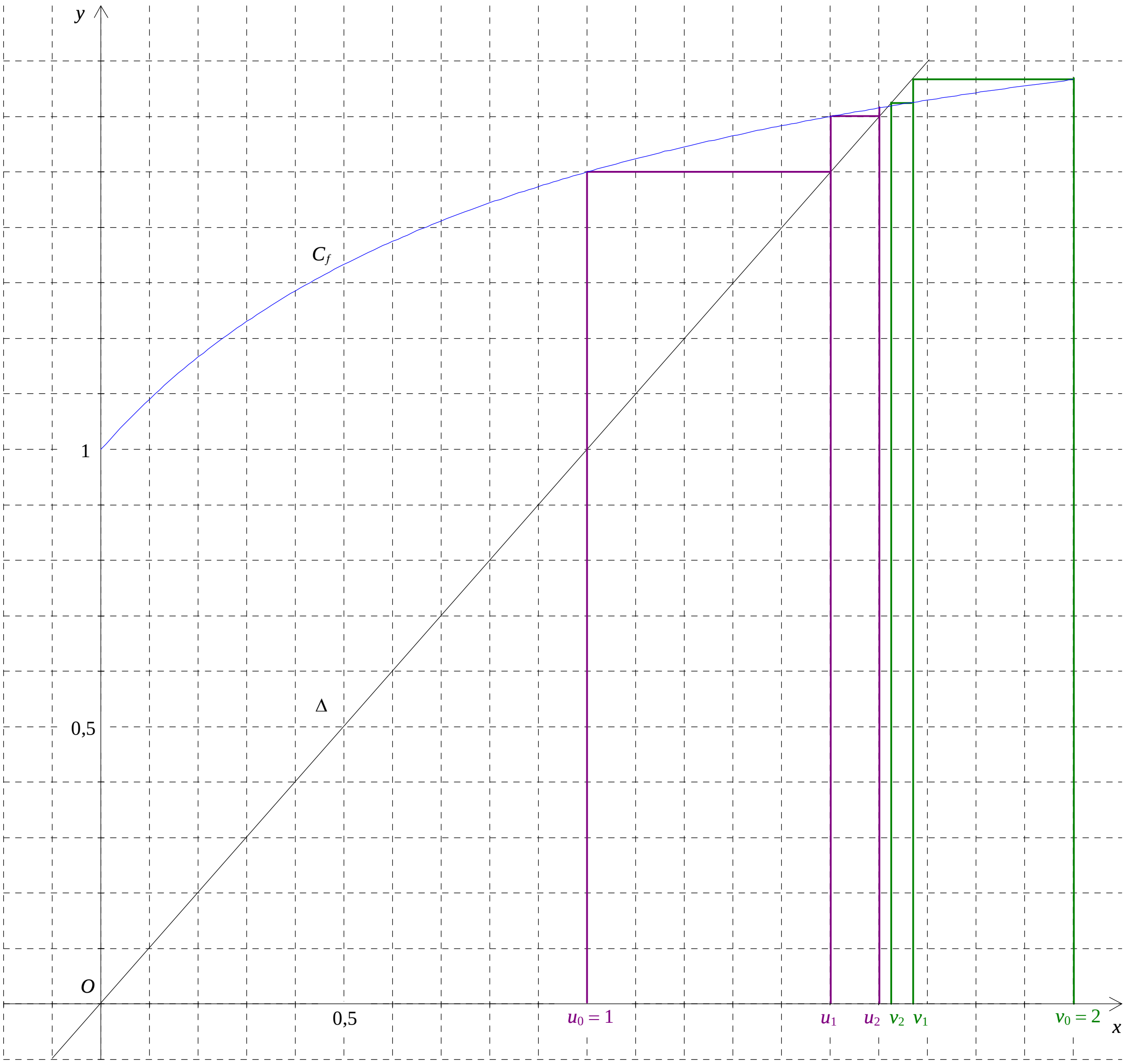
En appliquant la fonction f qui est croissante sur $[1 ; 2]$:

$$f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$$

Et comme $f(1) = \frac{3}{2}$ et $f(2) = \frac{5}{3}$: $\qquad \frac{3}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{5}{3}$

D'où : $\qquad f(x) \in [1 ; 2]$

2. a. On construit sur le graphique les trois premiers termes des suites (u_n) et (v_n) à l'aide de la droite Δ d'équation $y = x$ qui permet de ramener les termes de la suite sur l'axe des abscisses.



Le graphique permet de conjecturer que la suite (u_n) est croissante, que la suite (v_n) est décroissante et que les deux suites convergent vers un même réel compris entre 1,6 et 1,7.

b. On considère la propriété $\wp$ définie pour tout entier naturel n par :

$$\wp(n) : 1 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 2$$

- Comme $v_0 = 2$ et $v_1 = f(2) = \dfrac{5}{3}$, on a $\wp(0)$. La propriété $\wp$ est initialisée en 0.

- Supposons que, pour un certain entier naturel n, on ait $\wp(n)$:

  $$1 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 2$$

  Comme f est croissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$:

  $$f(1) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n) \leqslant f(2)$$

  $$\frac{3}{2} \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{5}{3}$$

  Et comme $1 \leqslant \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{5}{3} \leqslant 2$: $\quad 1 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 2$

  Ce qui est $\wp(n+1)$.

  La propriété $\wp$ est donc héréditaire à partir de $n = 0$

Conclusion : la propriété $\wp$ est initialisée en 0 et héréditaire à partir du rang 0. Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit qu'elle est vraie pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n : $\quad 1 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 2$

On démontre de même que : $\quad 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

c. Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = f(v_n) - f(u_n) = \frac{2v_n+1}{v_n+1} - \frac{2u_n+1}{u_n+1} = \frac{2u_nv_n + 2v_n + u_n + 1 - 2u_nv_n - 2u_n - v_n - 1}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

On considère la propriété $Q(n)$ définie pour tout entier naturel n par :

$$Q(n) : v_n - u_n \geqslant 0$$

- Comme $v_0 - u_0 = 1$ et $v_1 - u_1 = \dfrac{5}{3} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{1}{4}$, on a $Q(0)$.

- Supposons que, pour un certain entier naturel n, on ait $Q(n)$:

  $$v_n - u_n \geqslant 0$$

  Comme $(v_n + 1)(u_n + 1)$ est positif (d'après la question 2.b.), le signe de $v_{n+1} - u_{n+1}$ est le même que celui de $v_n - u_n$ qui est positif par hypothèse de récurrence donc :

  $$v_{n+1} - u_{n+1} \geqslant 0$$

  Ce qui est $Q(n + 1)$.

On a donc, pour tout entier naturel n : $\quad v_n - u_n \geqslant 0$

Par ailleurs, toujours d'après la question 2.b. on a :

$$(v_n + 1)(u_n + 1) \geqslant 4$$

Et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{(v_n+1)(u_n+1)} \leqslant \frac{1}{4}$$

Et en multipliant par $v_n - u_n$ qui est positif d'après ce qui précède :

$$\frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)} \leqslant \frac{1}{4}(v_n - u_n)$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(v_n - u_n)$$

d. On considère la propriété R définie pour tout entier naturel n par :

$$R(n) : v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

On a $v_0 - u_0 = 1$ d'où $R(0)$.

Supposons que, pour un certain entier naturel n, on ait $R(n)$:

$$v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Alors, d'après la question 2.c. : $\quad v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

Ce qui est $R(n + 1)$.

On a donc, pour tout entier naturel n : $\quad v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$

e. D'après les questions 2.c. et 2.d. on a pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Or $\frac{1}{4} \in]-1 ; 1[$, donc : $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

(Limite d'une suite géométrique de raison $q \in]-1 ;1[$)

Et d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Récapitulons : (u_n) est croissante

(v_n) est décroissante

$(v_n - u_n)$ converge vers 0

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers un même réel α (dans $[1 ; 2]$).

On sait que : $\quad u_{n+1} = f(u_n)$

Par passage à la limite : $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n)$

Et comme f est continue sur $[1 ; 2]$: $\quad \alpha = f(\alpha)$

$$\alpha = \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 1}$$

$$\alpha(\alpha + 1) = 2\alpha + 1$$

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = \sqrt{5}$ et on obtient :

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Mais comme $\alpha \in [1 ; 2]$: $\quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618$ à 10^{-3} près

Cette limite est le nombre d'or.

Exercice 3 (5 points)

1. a. On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{-x} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-\mathbf{e}^{-x}) = 2$

Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$

Donc, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b. Pour tout réel x de $[0, +\infty[$, on a :

$$f(x)-(2x-2) = (x-1)(2-\mathbf{e}^{-x}) - (2x-2) = (1-x)\,\mathbf{e}^{-x} = \mathbf{e}^{-x} - x\mathbf{e}^{-x}$$

On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathbf{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{-x} = 0$

Donc, par différence : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-2) = 0$

Ce qui prouve que la droite Δ d'équation $y = 2x-2$ est asymptote oblique à la courbe C en $+\infty$.

c. On a vu que : $f(x)-(2x-2) = (1-x)\,\mathbf{e}^{-x}$

On en déduit que :

- Sur $[0 ; 1]$, la courbe C est au-dessus de son asymptote Δ.
- Sur $[1, +\infty[$, la courbe C est en dessous de son asymptote Δ.

2. a. La fonction f est de la forme : $f = uv$ où $\begin{cases} u(x) = x-1 \\ v(x) = 2-\mathbf{e}^{-x} \end{cases}$

Les fonction u et v sont dérivables sur $[0, +\infty[$ donc f l'est également et on a :

$$f' = u'v + uv'$$

Ce qui donne : $f'(x) = (2-\mathbf{e}^{-x}) + (x-1)\,\mathbf{e}^{-x} = x\,\mathbf{e}^{-x} + 2(1-\mathbf{e}^{-x})$

b. Lorsque $x > 0$, on a $-x < 0$ et par stricte croissance de l'exponentielle :

$$\mathbf{e}^{-x} < \mathbf{e}^{0}$$

D'où : $1-\mathbf{e}^{-x} > 0$

Par ailleurs, comme $x > 0$: $x\,\mathbf{e}^{-x} > 0$

La somme de quantités strictement positives étant strictement positive, on a pour tout réel $x > 0$:

$$f'(x) > 0$$

c. On a $f'(0) = 0$. La fonction f est strictement croissante (sa dérivée ne s'annule qu'en un point isolé).

Tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
Signe de la dérivée f'	0	$+$	
Variation de la fonction f	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3. Sur l'intervalle $[1 ; 3]$, la courbe C est en dessous de Δ, l'aire en question est donc donnée par l'intégrale :

$$\int_1^3 [(2x-2)-f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^3 (x-1)\mathbf{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Posons : $u(x) = x-1$ et $v(x) = -\,\mathbf{e}^{-x}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur [1 ; 3] et de dérivées continues sur [1 ; 3] :

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = \mathbf{e}^{-x}$$

Une intégration par parties donne alors :

$$\int_1^3 (x-1)\mathbf{e}^{-x}\,dx = \Big[(x-1)\big(-\mathbf{e}^{-x}\big)\Big]_1^3 + \int_1^3 \mathbf{e}^{-x}\,dx = \Big[(x-1)\big(-\mathbf{e}^{-x}\big) - \mathbf{e}^{-x}\Big]_1^3 = \Big[-x\mathbf{e}^{-x}\Big]_1^3 = -3\mathbf{e}^{-3} + \mathbf{e}^{-1} \text{ u.a.}$$

Or, une unité d'aire correspond à 4 cm^2. L'aire du domaine plan délimité par la courbe C, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ est donc :

$$\frac{4}{\mathbf{e}} - \frac{12}{\mathbf{e}^3} \simeq 0{,}87 \text{ cm}^2 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

4. a. On cherche le point de la courbe C dont l'abscisse x est telle que :

$$f'(x) = 2$$

$$x\,\mathbf{e}^{-x} + 2(1 - \mathbf{e}^{-x}) = 2$$

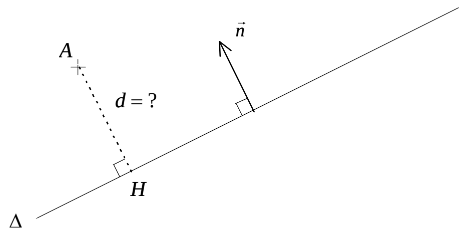
$$(x - 2)\,\mathbf{e}^{-x} = 0$$

$$x = 2$$

On calcule l'image de 2 : $f(2) = 2 - \mathbf{e}^{-2}$

La courbe C a une tangente T parallèle à Δ au point $A(2 ; 2 - \mathbf{e}^{-2})$.

b. Nous devons calculer la distance entre un point $A(x_A ; y_A)$ et une droite Δ. Plaçons-nous dans le cas général et procédons de la même manière que pour le calcul de la distance entre un point et un plan. Notons $ax + by + c = 0$ une équation de la droite Δ. Un vecteur normal à Δ est par exemple $\vec{n}\,(a ; b)$. Notons $H(x_H ; y_H)$ le projeté orthogonal de A sur Δ.



Comme les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires, on a en calculant de deux façons $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}\right|$:

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}\right| = |a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A)| = \sqrt{a^2+b^2} \times AH$$

Mais comme le point H est sur la droite Δ, on a :

$$ax_H + by_H + c = 0$$

D'où : $$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

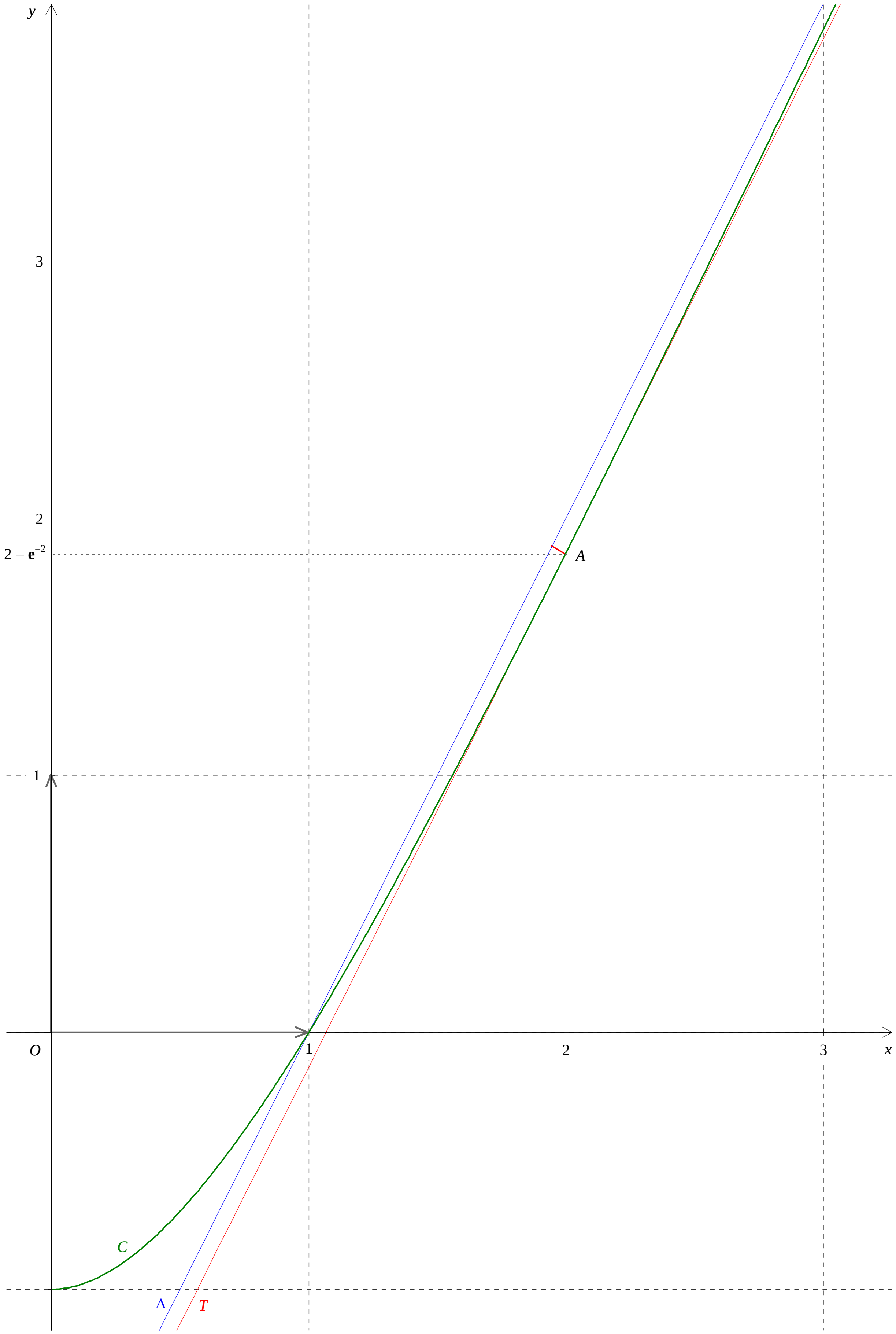
Ici, un vecteur directeur de la droite Δ est $\vec{u}\,(1 ; 2)$. Un vecteur normal à Δ est par exemple $\vec{n}\,(2 ; -1)$.

La distance entre le point A et la droite Δ est alors :

$$d(A, \Delta) = \frac{|2x_A - y_A - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\mathbf{e}^2\sqrt{5}} \text{ u.d. (unité de distance)}$$

Ce qui donne en cm : $$\frac{2}{\mathbf{e}^2\sqrt{5}} \simeq 0{,}12 \text{ cm à } 10^{-2} \text{ près}$$

Représentation graphique : (unités non respectées)



Exercice 4 (5 points) OBLIGATOIRE

1. a. Si le dé indique 1, le joueur gagne avec une probabilité de $\frac{2}{5}$ (puisqu'il y a 4 voyelles sur un total de 10 lettres) : $$p_{D_1}(G) = \frac{2}{5}$$

   Si le dé indique 2, le joueur tire simultanément deux lettres de l'urne. La probabilité que ces deux lettres soient des voyelles est : $$p_{D_2}(G) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

   Si le dé indique 3, le joueur tire simultanément trois lettres de l'urne. La probabilité que ces trois lettres soient des voyelles est : $$p_{D_3}(G) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

   b. D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition $D_1 \cup D_2 \cup D_3$:

$$p(G) = p_{D_1}(G)\,p(D_1) + p_{D_2}(G)\,p(D_2) + p_{D_3}(G)\,p(D_3)$$

$$p(G) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{15} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{30} \times \frac{1}{2} = \frac{23}{180}$$

   Le joueur a environ 13% de chance de gagner une partie.

2. Il s'agit de calculer : $$p_G(D_1) = \frac{p(D_1 \cap G)}{p(G)} = \frac{p_{D_1}(G)\,p(D_1)}{p(G)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{6}}{\frac{23}{180}} = \frac{12}{23}$$

3. Considérons l'expérience $\mathscr{E}$ qui consiste à jouer une partie. On note S l'événement "gagner la partie" (succès). Notons p la probabilité d'un succès ; d'après la question 1.b., $p = \frac{23}{180}$. On répète de manière indépendante $n = 6$ fois l'expérience $\mathscr{E}$ et on note X le nombre de parties gagnées par le joueur. La variable aléatoire X représentant le nombre de succès obtenus suit donc une loi binomiale de paramètres n et p.

   On a donc : $$p(X = 2) = \binom{6}{2} p^2 (1-p)^4 = 15 \times \left(\frac{23}{180}\right)^2 \left(\frac{157}{180}\right)^4 \simeq 0{,}14 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

4. On recherche la plus petite valeur du paramètre n tel que :

$$p(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}9$$

   En passant à l'événement contraire : $$1 - p(X = 0) \geqslant 0{,}9$$

$$p(X = 0) \leqslant 0{,}1$$

$$\left(\frac{157}{180}\right)^n \leqslant 0{,}1$$

   Par croissance du logarithme : $$n \ln\left(\frac{157}{180}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{10}\right)$$

   Et comme $\ln\left(\frac{157}{180}\right) < 0$ (car $\frac{157}{180} \in \,]0\,;1[$) :

$$n \geqslant -\frac{\ln 10}{\ln\left(\frac{157}{180}\right)}$$

La calculatrice donne : $-\dfrac{\ln 10}{\ln\left(\frac{157}{180}\right)} \simeq 16{,}84$ à 10^{-2} près

Et comme n est un entier : $\boldsymbol{n \geqslant 17}$

Conclusion : le joueur doit effectuer au minimum 17 parties pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9.

Exercice 4 (5 points) SPÉCIALITÉ

1. a. **Démonstration de cours.**

Plaçons-nous dans le plan complexe et notons z_A, z_B et z_C les affixes respectives des points A, B et C.

Rappelons que l'écriture complexe d'une similitude directe S est de la forme :

$$z' = az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

Il existe donc une similitude directe S qui transforme B en A et A en C si et seulement si :

$$\text{il existe } (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \text{ tel que } \begin{cases} z_A = az_B + b & (E_1) \\ z_C = az_A + b & (E_2) \end{cases}$$

Rappel : un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

admet un unique couple solution (x, y) si et seulement si :

$$ab' - a'b \neq 0$$

Ce système, d'inconnues a et b, admet une unique solution si et seulement si :

$$z_B \neq z_A$$

Or, les points A et B sont distincts donc z_A et z_B aussi.

Donc le système admet un unique couple solution (a, b) dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

En effectuant $(E_1) - (E_2)$, on obtient : $a = \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_A}$

Et comme A et C sont distincts, on a bien : $a \in \mathbb{C}^*$

Il existe donc bien une unique similitude directe S transformant B en A et A en C.

b. Le rapport de la similitude S est donné par :

$$\frac{AC}{BA} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

et son angle par : $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

2. Le centre Ω de la similitude S est invariant par S :

$$S(\Omega) = \Omega$$

Par ailleurs : $S(B) = A$

On en déduit que : $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Ω appartient au cercle de diamètre $[AB]$

On a $C = S \circ S(B)$ donc : $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}\right) = -\pi\ [2\pi]$

Ω appartient à la droite (BC)

Ces deux dernières informations permettent de construire Ω.

3. a. Puisque $D = S \circ S(A)$, on a : $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}\right) = -\pi \ [2\pi]$

   Donc les points A, Ω et D sont alignés.

   Puisque de plus $C = S \circ S(B)$, on a : $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}\right) = -\pi \ [2\pi]$

   Donc les droites (CD) et (AB) sont parallèles.

   b. Puisque $[CD] = S([AC])$, on a : $\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

   D'où : $$CD = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{2} = 3+\sqrt{5}$$

4. a. Puisque le point E est le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD), on a :

   $$(BE) \perp (CD)$$

   Et comme les droites (AB) et (CD) sont parallèles :

   $$(BE) \perp (AB)$$

   Par ailleurs, comme $S(B) = A$ et $S(E) = F$:

   $$(BE) \perp (AF)$$

   Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles donc :

   $$(AB) \mathbin{//} (AF)$$

   Les points A, B et F sont alignés.

   Le point F est donc l'intersection de la perpendiculaire à (ΩE) passant par Ω et de la droite (AB).

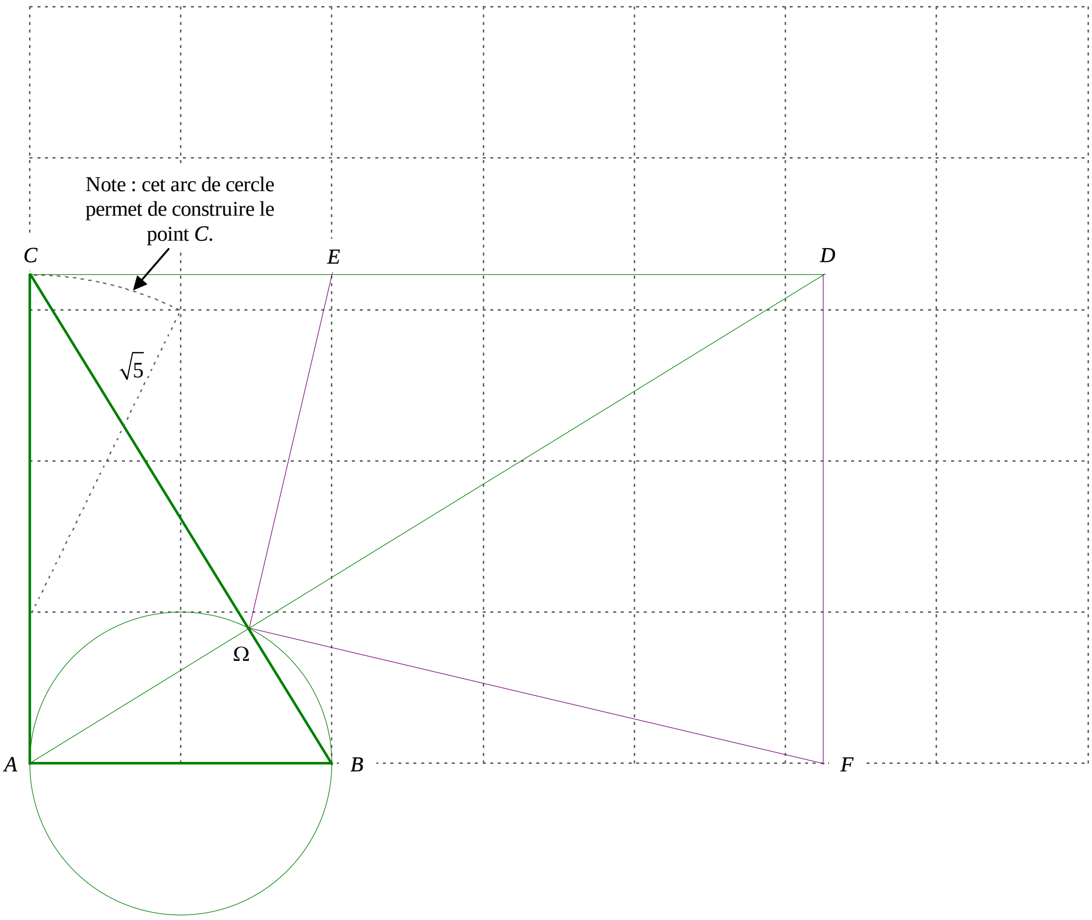
   b. Comme $BACE$ est un rectangle (car $(AB) \mathbin{//} (CE)$, $(AB) \perp (AC)$ et $(CE) \perp (BE)$), son image par S, à savoir $ACDF$, en est un aussi. Comme (BE) est parallèle à (FD), $BEDF$ est aussi un rectangle.

   De plus, puisque C, E et D sont alignés dans cet ordre on a :

   $$ED = CD - CE = 3+\sqrt{5} - 2 = 1+\sqrt{5} = AC = BE$$

   Un rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un carré.

   Conclusion : ***BFDE* est un carré**


Note : cet arc de cercle permet de construire le point *C*.
C
E
D
$\sqrt{5}$
Ω
A
B
F