

Exercice 1 (4 points)

*Bien qu'aucune justification ne soit demandée dans cet exercice,
on donne dans un but pédagogique quelques explications.*

1. FAUX

Contre-exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in]0, +\infty[$

La fonction inverse est bien décroissante sur $]0, +\infty[$ et pourtant on n'a pas $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2. FAUX

Pour construire un contre exemple, il suffit de prendre deux fonctions polynômes de degrés différents (ou de même degré mais de coefficients principaux différents).

$$f(x) = -x \text{ et } g(x) = x^2 + 1$$

On a bien : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Et pourtant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = 0$ (et non -1)

3. VRAI

En effet, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, on a d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

4. FAUX

Contre-exemple : $f(x) = \frac{|x|}{x}$

La fonction f est bien définie sur \mathbb{R}^* et : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

La fonction f admet des limites finies à droite et à gauche de 0, donc sa courbe n'admet pas d'asymptote verticale en 0.

5. VRAI

La fonction f est de la forme : $f = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 + 3x + 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur \mathbb{R} (u est une fonction polynôme et v est la fonction exponentielle) donc la fonction f l'est également par produit et on a :

$$f' = u'v + uv'$$

Ce qui donne, pour tout réel x : $f'(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x + 1)e^x$

$$f'(x) = (x^2 + 5x + 4)e^x$$

On calcule alors : $f'(x) - f(x) = (x^2 + 5x + 4)e^x - (x^2 + 3x + 1)e^x = (2x + 3)e^x$

Donc f est bien une solution, sur \mathbb{R} , de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)e^x$.

6. **VRAI**

Il suffit d'appliquer la règle d'associativité du barycentre :

$$\begin{array}{|c|} \hline G \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 3 & -2 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline I & C \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Donc G est bien le milieu du segment $[CI]$.

7. **FAUX**

On sait que, pour tout point M du plan :

$$3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (3 - 2 + 1)\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MG}$$

L'ensemble des points M recherchés est donc tel que :

$$\|2\overrightarrow{MG}\| = 1$$

$$MG = \frac{1}{2}$$

Il s'agit du cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{2}$ (et non 1).

8. **FAUX**

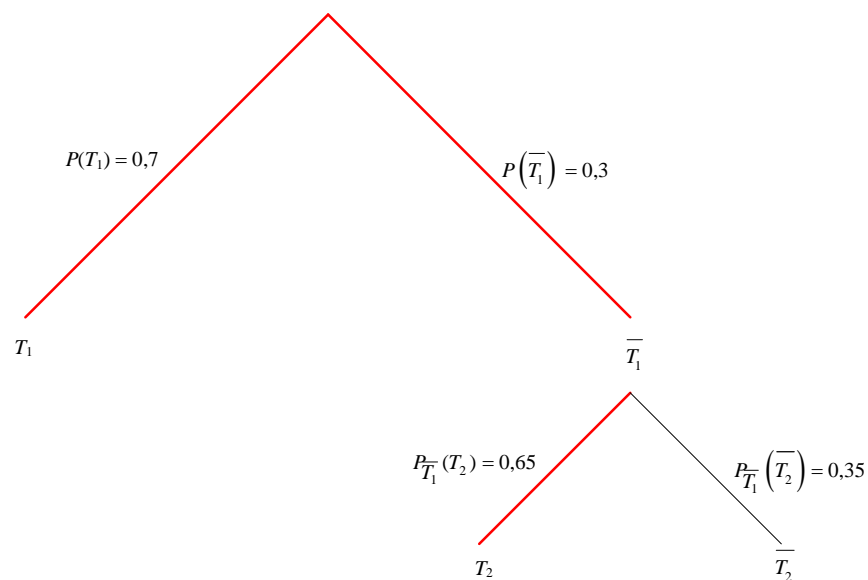
Il suffit de choisir un point M du cercle de diamètre $[AB]$ (autre que A et B). Comme le triangle AMB est rectangle en M , on aura bien :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

alors que M n'est ni en A , ni en B .

Exercice 2 (3 points)

Arbre de la situation : (on a noté T_2 l'événement "le second test est positif")



(En rouge sont mis en évidence les chemins qui correspondent à l'événement C)

1. On a : $P(T_1) = 0,7$

L'événement C est : $C = T_1 \cup (\overline{T_1} \cap T_2)$

(L'écran est acheminé chez le client s'il passe le premier test ou s'il échoue au premier test et réussit le second)

Comme les événements T_1 et $\overline{T_1} \cap T_2$ sont incompatibles (puisque $T_1 \cap \overline{T_1} \cap T_2 = \emptyset$), on a :

$$P(C) = P(T_1) + P(\overline{T_1} \cap T_2) = P(T_1) + P_{\overline{T_1}}(T_2)P(\overline{T_1}) = 0,7 + 0,65 \times 0,3 = 0,895$$

2. a. La loi de probabilité du gain X réalisé par le fabricant est donnée par le tableau suivant :

Événement	L'écran passe le premier test avec succès	L'écran échoue au premier test mais réussit le second	L'écran échoue aux deux tests (et n'est donc pas vendu)
Gain X	$a - 1000$	$a - 1050$	-1050
Probabilité	$P(T_1) = 0,7$	$P(\overline{T_1} \cap T_2) = 0,65 \times 0,3 = 0,195$	$P(\overline{T_1} \cap \overline{T_2}) = 0,35 \times 0,3 = 0,105$

b. L'espérance $\mathbb{E}(X)$ est donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = 0,7(a - 1000) + 0,195(a - 1050) - 0,105 \times 1050 = 0,895a - 1015$$

c. L'entreprise peut espérer réaliser des bénéfices dès que :

$$\mathbb{E}(X) \geq 0$$

$$0,895a - 1015 \geq 0$$

$$a \geq \frac{1015}{0,895}$$

L'entreprise peut espérer réaliser des bénéfices pour un prix de vente a tel que :

$$a \geq 1135 \text{ €}$$

(à un euro près par excès)

Exercice 3 (8 points)

- Partie A -

1. La fonction f est dérivable sur $[0 ; 1]$ comme produit de fonctions que le sont et on a pour tout t de $[0 ; 1]$:

$$f'(t) = -e^t + (2 - t)e^t = (1 - t)e^t = g(t)$$

Par conséquent, la fonction f est bien une primitive de g sur $[0 ; 1]$.

On a :
$$u_1 = \int_0^1 (1-t)e^t dt = \int_0^1 g(t) dt = [f(t)]_0^1 = f(1) - f(0) = e - 2$$

2. Calculons, par parties, l'intégrale :
$$u_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt$$

Posons :
$$u(t) = (1-t)^{n+1} ; v(t) = e^t$$

Les fonctions u et v sont dérivables pour tout réel t de $[0 ; 1]$ et :

$$u'(t) = -(n+1)(1-t)^n ; v'(t) = e^t$$

Comme les fonctions u' et v' sont continues sur $[0 ; 1]$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt = \int_0^1 u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t) dt$$

$$u_{n+1} = \left[(1-t)^{n+1} e^t \right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 (1-t)^n e^t dt = (n+1)u_n - 1$$

- Partie B -

A l'examen des résultats de la première calculatrice, la suite (u_n) semble diverger vers $-\infty$, tandis qu'avec la seconde, elle semble diverger vers $+\infty$!

- Partie C -

1. Puisque t est élément de $[0 ; 1]$, on a pour tout entier naturel n non nul :

$$(1-t)^n \geq 0$$

Par ailleurs, la fonction exponentielle est strictement positive :

$$e^t > 0$$

Donc par produit :

$$(1-t)^n e^t \geq 0$$

Et par positivité de l'intégrale :

$$\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \geq 0$$

C'est-à-dire :

$$u_n \geq 0$$

2. a. On a :

$$0 \leq t \leq 1$$

Par croissance de la fonction exponentielle sur $[0 ; 1]$:

$$e^0 \leq e^t \leq e^1$$

D'où :

$$e^t \leq e$$

En multipliant cette inégalité par $(1-t)^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) qui est positif :

$$(1-t)^n e^t \leq e(1-t)^n$$

b. En intégrant l'inégalité ci-dessus entre 0 et 1, nous obtenons :

$$u_n \leq e \int_0^1 (1-t)^n dt$$

Or :

$$\int_0^1 (1-t)^n dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

D'où, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \leq \frac{e}{n+1}$$

3. On a donc, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite (u_n) admet une limite et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

- Partie D -

1. Considérons la propriété \wp définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$\wp(n) : v_n = u_n + (n!)(a + 2 - e)$$

- On a $v_1 = a$ et $u_1 = e - 2$ donc on peut écrire :

$$v_1 = u_1 + a + 2 - e$$

D'où $\wp(1)$. La propriété \wp est initialisée au rang 1.

- Supposons $\wp(n)$ pour un certain entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$v_n = u_n + (n!)(a + 2 - e)$$

En multipliant par $(n + 1) : (n + 1)v_n = (n + 1)u_n + ((n + 1)!) (a + 2 - e)$

$$v_{n+1} + 1 = u_{n+1} + 1 + ((n + 1)!) (a + 2 - e)$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + ((n + 1)!) (a + 2 - e)$$

D'où $\wp(n + 1)$. La propriété \wp est héréditaire à partir du rang 1.

La propriété \wp est initialisée au rang 1 et héréditaire à partir du rang 1 donc d'après le principe de raisonnement par récurrence, elle est vraie pour tout rang n supérieur ou égal à 1 :

$$v_n = u_n + (n!)(a + 2 - e)$$

2. On sait d'après la partie C que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

- Si $a = e - 2$, alors $(v_n) = (u_n)$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

- Si $a > e - 2$, alors $a + 2 - e > 0$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n!) = +\infty$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

- Si $a < e - 2$, alors $a + 2 - e < 0$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n!) = +\infty$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$$

3. La calculatrice travaille avec des valeurs approchées. Comme $e - 2$ est un nombre irrationnel, la première calculatrice a dû arrondir $e - 2$ par défaut tandis que la seconde calculatrice a dû l'arrondir par excès.

Exercice 4 (5 points)

1. Voir la figure ci-après.

2. Remarquons que $e^{\frac{i\pi}{3}} = -\mathbf{j}^2$, ce qui permet de simplifier certains calculs.

On utilisera aussi les relations $\mathbf{j}^3 = 1$ et $1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2 = 0$ qui seront démontrées à la question 3.b.

a. On a :

$$a' - c = -\mathbf{j}^2(b - c)$$

$$a' = -\mathbf{j}^2(6\mathbf{j} - 8\mathbf{j}^2) + 8\mathbf{j}^2 = -6 + 8\mathbf{j} + 8\mathbf{j}^2 = -6 + 8 \times (-1) = -14$$

L'affixe a' est bien un nombre réel. La droite (AA') , qui est l'axe des réels, contient donc O .

b. On a :

$$b' = -\mathbf{j}^2(c - a) + a = -\mathbf{j}^2(8\mathbf{j}^2 - 8) + 8 = -8\mathbf{j} + 8\mathbf{j}^2 + 8 = 8(1 - \mathbf{j} + \mathbf{j}^2) = -16\mathbf{j} = 16e^{-i\pi} e^{\frac{2i\pi}{3}} = 16e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

$$\text{On a : } (\overline{OB}, \overline{OB'}) = (\overline{OB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overline{OB'}) = \arg(b') - \arg(b) = -\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\pi \quad [2\pi]$$

Donc : $O \in (BB')$

c. On admet que : $c' = 7 + 7i\sqrt{3} = 14 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 14 e^{i\frac{\pi}{3}}$

On a alors : $(\overline{OC}, \overline{OC'}) = (\overline{OC}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overline{OC'}) = \arg(c') - \arg(c) = \frac{\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} = -\pi \quad [2\pi]$

Donc : $O \in (CC')$

On en déduit que : **les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes en O**

(Il s'agit du théorème de Napoléon)

3. a. On a : $OA + OB + OC = |a| + |b| + |c| = 8 + 6 + 8 = 22$

b. On a : $\mathbf{j}^3 = e^{2i\pi} = 1$ et $1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2 = \frac{1 - \mathbf{j}^3}{1 - \mathbf{j}} = 0$

c. En distribuant :

$$(a - z) + (b - z)\mathbf{j}^2 + (c - z)\mathbf{j} = a + b\mathbf{j}^2 + c\mathbf{j} - z(1 + \mathbf{j}^2 + \mathbf{j}) = a + b\mathbf{j}^2 + c\mathbf{j}$$

D'où, par passage au module :

$$|(a - z) + (b - z)\mathbf{j}^2 + (c - z)\mathbf{j}| = |a + b\mathbf{j}^2 + c\mathbf{j}| = |8 + 6 + 8| = 22$$

d. On a :

$$MA + MB + MC = |a - z| + |b - z| + |c - z| = |a - z| + |(b - z)\mathbf{j}^2| + |(c - z)\mathbf{j}|$$

Et d'après l'inégalité triangulaire :

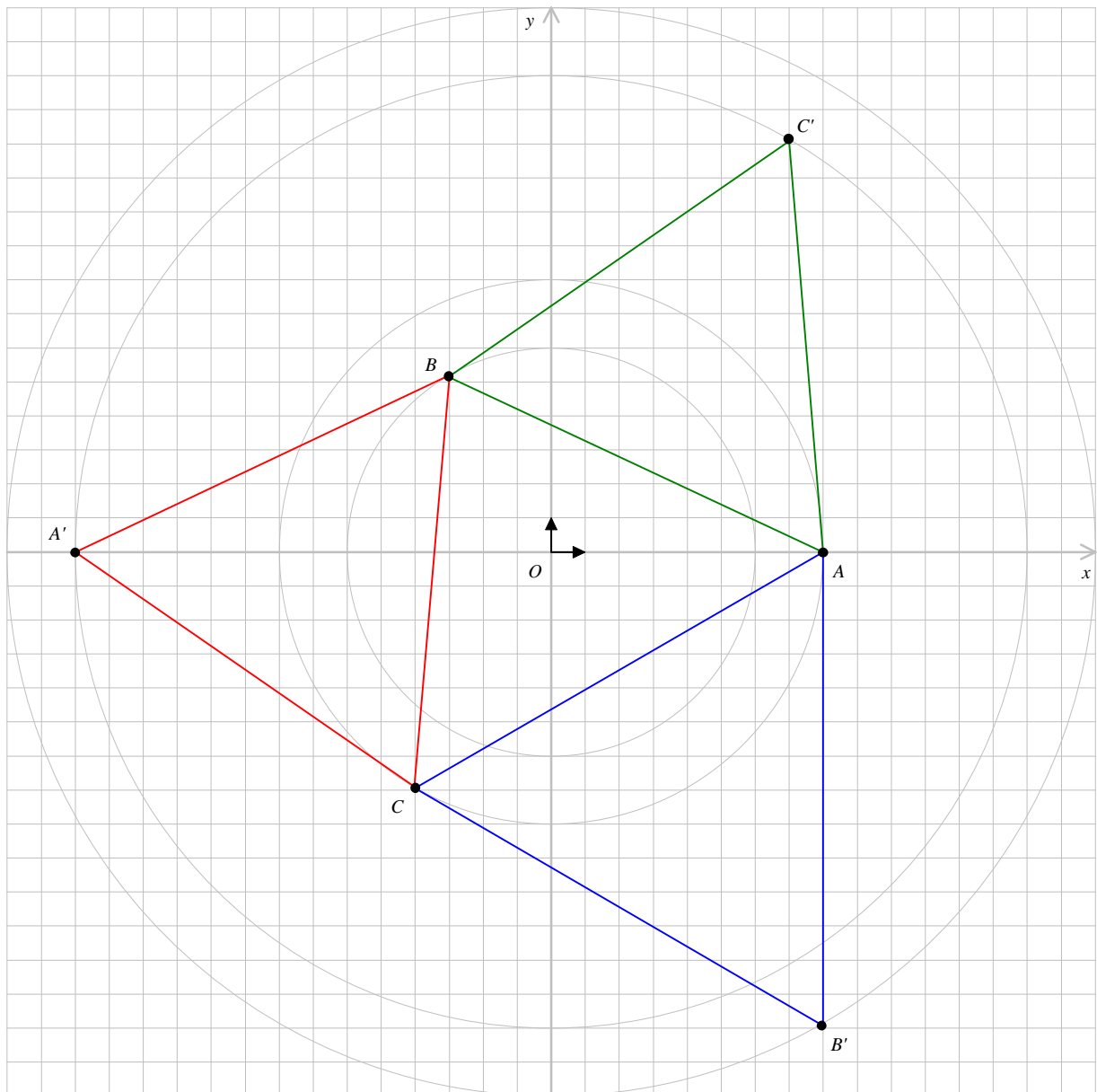
$$MA + MB + MC \geq |(a - z) + (b - z)\mathbf{j}^2 + (c - z)\mathbf{j}|$$

Et d'après 3.c. : $MA + MB + MC \geq 22$

C'est-à-dire : $MA + MB + MC \geq OA + OB + OC$

On a démontré que la somme $MA + MB + MC$ est minimale lorsque M est le point O (point de concours des droites (AA') , (BB') et (CC')).

Remarque : ce point O qui minimise la somme $MA + MB + MC$ s'appelle le point de Fermat dans le triangle ABC .



Exercice 4 *Spécialité* (5 points)

1. a. Effectuons l'algorithme d'Euclide appliqué à 226 et 109 :

$$226 = 2 \times 109 + 8$$

$$109 = 13 \times 8 + 5$$

$$8 = 1 \times 5 + 3$$

$$5 = 1 \times 3 + 2$$

$$3 = 1 \times 2 + 1$$

$$2 = 2 \times 1 + 0$$

Le PGCD est le dernier reste non nul donc :

$$\text{PGCD}(226 ; 109) = 1$$

L'équation Diophantienne $ax + by = c$ admet des solutions si et seulement si le $\text{PGCD}(a, b)$ divise c .

C'est bien le cas ici, donc (E) admet des solutions entières.

b. On recherche une solution particulière (u, v) de (E) . Pour cela, on applique l'algorithme de Bézout :

$$1 = 3 - 2$$

$$1 = 3 - 1(5 - 3) = 2 \times 3 - 5$$

$$1 = 2 \times (8 - 5) - 5 = 2 \times 8 - 3 \times 5$$

$$1 = 2 \times 8 - 3 \times (109 - 13 \times 8) = 41 \times 8 - 3 \times 109$$

$$1 = 41 \times (226 - 2 \times 109) - 3 \times 109 = 41 \times 226 - 85 \times 109$$

Le couple $(u, v) = (-85 ; -41)$ est une solution particulière de l'équation $109x - 226y = 1$.

Soit maintenant $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une solution quelconque de (E) . On a :

$$\begin{cases} 109u - 226v = 1 \\ 109x - 226y = 1 \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre :

$$\begin{cases} 109u - 226v = 1 \\ 109(x - u) = 226(y - v) \end{cases}$$

Donc 226 divise $109(x - u)$ et comme $\text{PGCD}(109, 226) = 1$. On en déduit que 226 divise $(x - u)$ d'après le théorème de Gauss. Il existe donc un entier h tel que :

$$x - u = 226h$$

$$x = u + 226h = -85 + 226h$$

En remplaçant $x - u$ par $226h$, il vient :

$$109 \times 226h = 226(y - v)$$

$$y = v + 109h = -41 + 109h$$

Posons $k = h - 1$, ainsi : $x = -85 + 226(k + 1) = 141 + 226k$

$$y = -41 + 109(k + 1) = 68 + 109k$$

Réciproquement, on vérifie bien que tous les couples (x, y) de la forme $(141 + 226k, 68 + 109k)$, où $k \in \mathbb{Z}$, sont des solutions de (E) .

Montrons maintenant qu'il existe une unique valeur d de $x = 141 + 226k$ qui soit élément de $\llbracket 0 ; 226 \rrbracket$:

$$0 \leq 141 + 226k \leq 226$$

$$-141 \leq 226k \leq 85$$

$$-\frac{141}{226} \leq k \leq \frac{85}{226}$$

Et comme k est entier, la seule possibilité est : $k = 0$

D'où : $d = 141$ et $e = 68$

Ainsi, on a bien : $109d = 1 + 226e$ avec $d \in \llbracket 0 ; 226 \rrbracket$

2. 227 n'est pas divisible par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, ni par 11 et ni par 13 (inutile de tester au delà, si 227 admettait un diviseur premier, il serait nécessaire inférieur à $E(\sqrt{227}) = 15$). C'est donc un nombre premier.

3. En fait : $A = \llbracket 0 ; 226 \rrbracket$

On a, par définition de f et g : $a^{109} \equiv f(a) \pmod{227}$

$a^{141} \equiv g(a) \pmod{227}$

a. Le reste de la division euclidienne de 0^{109} par 227 est bien sûr 0 donc :

$$f(0) = 0$$

De même $g(0) = 0$ donc : $g(f(0)) = 0$

b. Comme 227 est premier, d'après le petit théorème de Fermat, on a pour tout entier a non nul :

$$a^{226} \equiv 1 \pmod{227}$$

c. Supposons a non nul pour le moment.

On a : $g(f(a)) \equiv (f(a))^{141} \equiv a^{109 \times 141} \pmod{227}$

Mais d'après la question 1.b. : $109 \times 141 = 1 + 226 \times 68$

D'où : $g(f(a)) \equiv a^{109 \times 141} \equiv a^{226 \times 68 + 1} \equiv a \pmod{227}$

Et d'après la question 3.b. on sait que $a^{226} \equiv 1 \pmod{227}$ donc :

$$g(f(a)) \equiv a \pmod{227}$$

Enfin, comme on a vu que $g(f(0)) = 0$, on a bien pour tout a de A :

$$g(f(a)) = a$$

Les fonctions f et g commutent ; en effet, pour tout entier a :

$$f(g(a)) \equiv (g(a))^{109} \equiv a^{109 \times 141} \equiv g(f(a)) \pmod{227}$$

On a donc également, pour tout a de A :

$$f(g(a)) = a$$