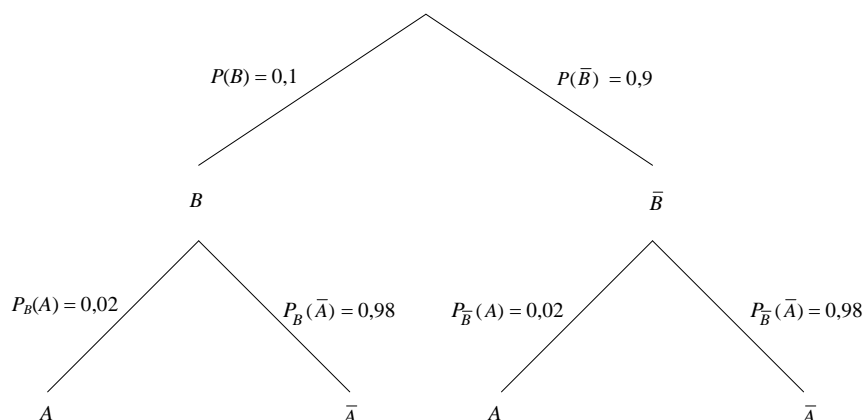


Exercice 1 (3 points)



En fait, comme A et B sont indépendants, on peut, sur l'arbre ci-contre, remplacer $P_B(A)$ par $P(A)$.
De même, on peut remplacer $P_B(\bar{A})$ par $P(\bar{A})$ etc.

1. On a : $C = \bar{A} \cap \bar{B}$

Donc : $P(C) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

Et comme A et B sont indépendants :

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = 1 - 0,02 - 0,1 + 0,02 \times 0,1 = 0,882$$

Lois de Morgan :
 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

2. On a : $D = A \cup B \setminus A \cap B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

(L'union privée de l'intersection s'appelle la différence symétrique)

Comme les événements $(\bar{A} \cap B)$ et $(A \cap \bar{B})$ sont incompatibles :

$$P(D) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P_B(\bar{A})P(B) + P_A(\bar{B})P(A) = (1 - P_B(A))P(B) + (1 - P_A(B))P(A)$$

Et comme A et B sont indépendants :

$$P(D) = (1 - P(A))P(B) + (1 - P(B))P(A) = P(B) - 2P(A)P(B) - P(A) = 0,116$$

Autre méthode :

Le contraire de D est :

"la montre tirée présente soit aucun défaut, soit les deux défauts"

Comme les événements C : "aucun défaut" et F : "les deux défauts" sont incompatibles, on a :

$$P(\bar{D}) = P(C) + P(F) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(A \cap B) = 0,882 + 0,002 = 0,884$$

$$P(D) = 0,116$$

3. On considère l'expérience de Bernoulli \mathcal{E} qui consiste à choisir **une** montre et regarder si elle vérifie l'événement C . On répète $n = 5$ fois cette expérience de manière indépendante et on note X la variable aléatoire égale au nombre d'occurrence de l'événement C .

Dans ces conditions, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = P(C) = 0,882$.

On a : $E = (X \geq 4)$

Comme les événements $(X = 4)$ et $(X = 5)$ sont incompatibles, on a :

$$P(E) = P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{4} p^4 (1 - p) + p^5 = 5 \times 0,882^4 \times 0,118 + 0,882^5$$

$$P(E) \simeq 0,891 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Exercice 2 (5 points)**OBLIGATOIRE**

Bien qu'aucune justification ne soit demandée dans cet exercice,
on donne dans un but pédagogique quelques explications.

1. On utilise le barycentre G du système $\{(A, 4), (B, -1)\}$, ainsi :

$$4\overline{MA} - \overline{MB} = 3\overline{MG}$$

L'ensemble des points M recherché est donc caractérisé par :

$$\|3\overline{MG}\| = 2$$

$$MG = \frac{2}{3}$$

Il s'agit d'une sphère de centre G et de rayon $\frac{2}{3}$.

Réponse (b) une sphère

2. Notons (x_H, y_H, z_H) les coordonnées du point H et $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

Comme les vecteurs $\overline{AH} \begin{pmatrix} x_H - 3 \\ y_H - 1 \\ z_H - 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x_H = t + 3 \\ y_H = 2t + 1 \\ z_H = 2t + 3 \end{cases}$$

Et comme le point H appartient au plan \mathcal{P} :

$$x_H + 2y_H + 2z_H = 5$$

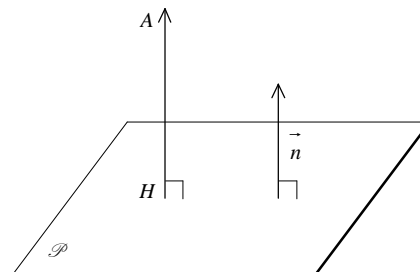
Ce qui permet de calculer le réel t :

$$t + 3 + 2(2t + 1) + 2(2t + 3) = 5$$

$$9t = -6$$

$$t = -\frac{2}{3}$$

On en déduit les coordonnées du point H : $H\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$

**Réponse (c)**

3. Pour savoir si la sphère de centre B et de rayon $r = 1$ coupe le plan \mathcal{P} ou non, il suffit de calculer la distance entre le point B et le plan \mathcal{P} :

$$d(B, \mathcal{P}) = \frac{|x_B + 2y_B + 2z_B - 5|}{\|\vec{n}\|} = \frac{5}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$$

On a :

$$d(B, \mathcal{P}) > r$$

En conséquence, la sphère de centre B et de rayon $r = 1$ et le plan \mathcal{P} ne sont pas sécants.

Réponse (C)

4. Un vecteur directeur \vec{u}' de la droite \mathcal{D}' est :

$$\vec{u}' \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' ne sont pas colinéaires (puisque leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles).

Donc les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas parallèles.

Voyons si elles sont sécantes ou non. Pour cela, on détermine un système d'équations paramétriques de \mathcal{D} :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overline{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \text{il existe un réel } t' \text{ tel que } \begin{cases} x-3 = t' \\ y-1 = 2t' \\ z-3 = -t' \end{cases}$$

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} x = t' + 3 \\ y = 2t' + 1, t' \in \mathbb{R} \\ z = -t' + 3 \end{cases}$$

On recherche s'il existe un couple (t, t') de paramètres tels que :

$$\begin{cases} 3 + 2t = t' + 3 \\ 3 + t = 2t' + 1 \\ t = -t' + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t = t' \\ 2 + t = 2t' \\ t = -t' + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t = t' \\ 2 + t = 4t \\ t = -2t + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t = t' \\ 2 = 3t \\ 3t = 3 \end{cases}$$

Il n'existe pas de réel t tel que $3t = 2$ et $3t = 3$, donc le système ci-dessus n'a pas de solution.

Les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas sécantes.

Conclusion : **Réponse (c) non coplanaires**

5. Dans l'espace, l'ensemble (P) des points M équidistants de deux points distincts A et B est un plan (appelé "plan médiateur" du segment $[AB]$).

Le vecteur $\overline{AB} \begin{vmatrix} -9 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan. On a donc, en notant $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 2\right)$ le milieu de $[AB]$:

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \overline{IM} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow -9\left(x + \frac{3}{2}\right) + \left(y - \frac{3}{2}\right) - 2(z - 2) = 0 \Leftrightarrow -9x + y - 2z - 11 = 0$$

Réponse (b) le plan d'équation cartésienne $9x - y + 2z + 11 = 0$

Exercice 2 (5 points)**SPÉCIALITÉ**

1. On calcule :

$$u_1 = 5u_0 - 6 = 5 \times 14 - 6 = 64$$

$$u_2 = 5u_1 - 6 = 5 \times 64 - 6 = 314$$

$$u_3 = 5u_2 - 6 = 5 \times 314 - 6 = 1564$$

$$u_4 = 5u_3 - 6 = 5 \times 1564 - 6 = 7814$$

**Conjecture : lorsque n est pair, u_n se termine par les chiffres 14
et lorsque n est impair, u_n se termine par les chiffres 64.**

2. Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36 = u_n + 4(6u_n - 9)$$

D'où :

$$u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$$

Considérons la propriété φ définie pour tout entier k par :

$$\varphi(k) : u_{2k} \equiv 2 \pmod{4} \text{ et } u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$$

- On a $u_0 \equiv 14 \equiv 2 \pmod{4}$ et $u_1 \equiv 64 \equiv 0 \pmod{4}$ d'où $\varphi(0)$.

La propriété φ est initialisée au rang $k = 0$.

- Supposons $\varphi(k)$ pour un certain entier k :

$$u_{2k} \equiv 2 \pmod{4} \text{ et } u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$$

D'après ce qui précède :

$$u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$$

En spécialisant $n = 2k$, on obtient :

$$u_{2k+2} \equiv u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$$

Et en spécialisant $n = 2k + 1$:

$$u_{2k+3} \equiv u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$$

D'où $\varphi(k + 1)$.La propriété φ est héréditaire à partir du rang $k = 0$.Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit $\varphi(k)$ pour tout entier naturel k :

$$u_{2k} \equiv 2 \pmod{4} \text{ et } u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$$

3. a. Considérons la propriété Q définie pour tout entier naturel n par :

$$Q(n) : 2u_n = 5^{n+2} + 3$$

- On a $2u_0 = 28 = 5^2 + 3$ d'où $Q(0)$.

La propriété Q est initialisée au rang $n = 0$.

- Supposons $Q(n)$ pour un certain entier n : $2u_n = 5^{n+2} + 3$

$$\text{Alors : } 2u_{n+1} = 10u_n - 12 = 5 \times 2u_n + 12 \stackrel{Q(n)}{=} 5(5^{n+2} + 3) - 12 = 5^{n+2} + 3$$

D'où $Q(n + 1)$.Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit $Q(n)$ pour tout entier naturel n :

$$2u_n = 5^{n+2} + 3$$

b. Considérons la propriété R définie pour tout entier naturel n par :

$$R(n) : 5^{n+2} \equiv 25 \pmod{100}$$

- On a $5^2 \equiv 25 \pmod{100}$ d'où $R(0)$.

La propriété R est initialisée au rang $n = 0$.

- Supposons $R(n)$ pour un certain entier n :

$$5^{n+2} \equiv 25 \pmod{100}$$

Alors : $5^{n+3} \equiv 5 \times 5^{n+2} \stackrel{R(n)}{\equiv} 5 \times 25 \equiv 125 \equiv 25 [100]$

D'où $R(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit $R(n)$ pour tout entier naturel n :

$$5^{n+2} \equiv 25 [100]$$

D'où : $5^{n+2} + 3 \equiv 28 [100]$

De la question 3.a., on en déduit alors : $2u_n \equiv 28 [100]$

4. Les deux derniers chiffres de l'écriture décimale d'un entier sont donnés par le reste de la division euclidienne de cet entier par 100. On vient de voir que les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de $2u_n$ sont 28. Donc les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n sont 14 ou 64.

Or, d'après la question 2, lorsque n est pair, on a :

$$u_n \equiv 2 [4]$$

Dans ce cas, les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n ne peuvent être 64 (puisque $64 \equiv 0 [4]$), par conséquent, les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n sont 14.

De même, lorsque n est impair, on a : $u_n \equiv 0 [4]$

Dans ce cas, les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n ne peuvent être 14 (puisque $14 \equiv 2 [4]$), par conséquent, les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n sont 64.

On a démontré la conjecture faite à la question 1.

5. Utilisons la propriété : $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a, a - b)$ pour $a \geq b$

On a ainsi, pour tout entier naturel n :

$$\text{PGCD}(u_{n+1}, u_n) = \text{PGCD}(5u_n - 6, u_n) = \text{PGCD}(u_n - 6, u_n) = \text{PGCD}(u_n, 6) = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{cases}$$

Or, u_n est un nombre pair (car se termine par 14 ou 64) et non multiple de 3 (sinon $2u_n - 3 = 5^{n+2}$ serait aussi multiple de 3 ce qui est absurde) donc $\text{PGCD}(u_n, 6) = 2$.

On a montré que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant égal à 2.

Exercice 3 (7 points)

- Partie A -

1. a. **Limite en 0.** On a : $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

Donc par somme : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

Limite en $+\infty$. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

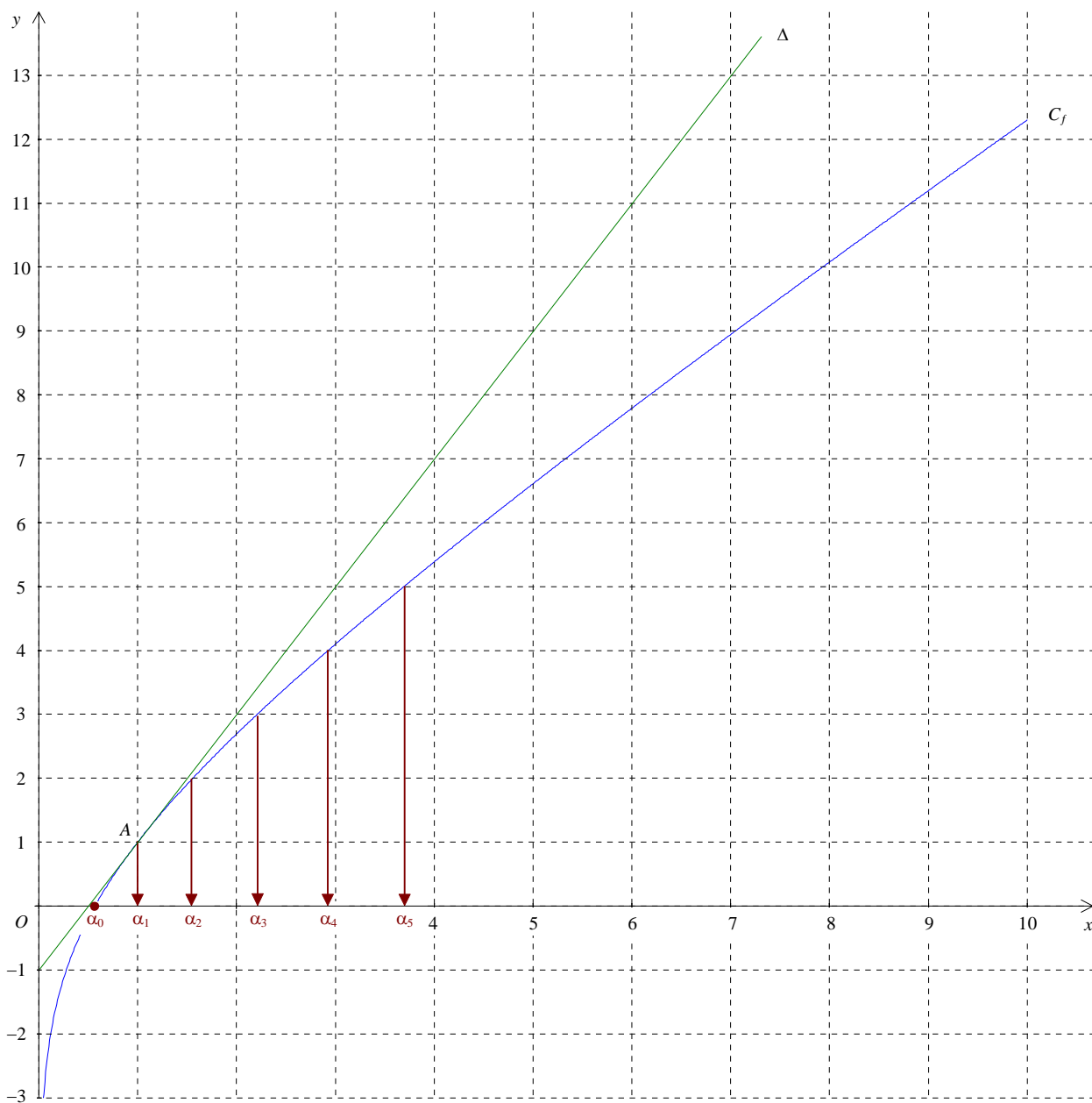
Donc par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- b. La fonction f est la somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0, +\infty[$ (à savoir la fonction $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$), donc l'est également.
2. a. La fonction f vérifie les trois conditions suivantes :

- f est continue sur $]0, +\infty[$ (comme somme de deux fonctions qui le sont)
- f strictement croissante sur $]0, +\infty[$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

En conséquence, f est une bijection de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} . Autrement dit, pour tout entier naturel n , l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution α_n dans $]0, +\infty[$.

b. Représentation graphique :



c. Le réel α_1 est l'unique solution de l'équation :

$$x + \ln x = 1$$

Or, $x = 1$ est une solution évidente de cette équation donc :

$$\alpha_1 = 1$$

d. S'il existait un entier naturel m tel que : $\alpha_m \geq \alpha_{m+1}$

Alors, en appliquant la fonction f qui est croissante sur $]0, +\infty[$, on aurait :

$$f(\alpha_m) \geq f(\alpha_{m+1})$$

C'est-à-dire : $m \geq m + 1$

Ce qui est absurde.

Par conséquent, pour tout entier naturel n : $\alpha_n < \alpha_{n+1}$

On a montré que la suite (α_n) est strictement croissante.

3. a. Une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse $x_0 = 1$ est donnée par :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

Or, la fonction f est dérivable (par somme) et pour tout réel x de $]0, +\infty[$ on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

D'où : $f'(1) = 2$

Par ailleurs : $f(1) = 1$

On obtient : $\Delta : y = 2x - 1$

b. La fonction h est dérivable pour tout réel x de $]0, +\infty[$ et :

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

Le signe de h' ne dépend que de celui de $1 - x$:

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

x	0	1	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	+	0	-
Variations de la fonction h	$-\infty$	0	$-\infty$

On constate que la fonction h admet un maximum égal à 0 sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Par conséquent la fonction h est négative pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$:

$$h(x) \leq 0$$

Par ailleurs, on remarque que :

$$f(x) - (2x - 1) = x + \ln x - 2x + 1 = \ln x - x + 1 = h(x)$$

On a donc pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$:

$$f(x) \leq 2x - 1$$

On a montré que la courbe Γ est située en dessous de sa tangente Δ .

c. Voir graphique.

4. D'après l'inégalité démontrée à la question 3.b. on a pour tout entier naturel n :

$$f(\alpha_n) \leq 2\alpha_n - 1$$

$$n \leq 2\alpha_n - 1$$

$$\frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$$

Remarque : cette égalité est bien valable pour $n = 0$ (elle permet d'ailleurs de montrer que $\alpha_0 \geq \frac{1}{2}$)

On a :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$$

Donc, par comparaison :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$$

- Partie B -

1. Démonstration de cours

Désignons par (u_n) cette suite supposée croissante et non majorée.

Comme la suite (u_n) est non majorée, pour tout réel A arbitrairement choisi, on peut trouver un rang N (qui est fonction de A) tel que :

$$u_N \geq A$$

Mais comme la suite (u_n) est croissante, pour tout entier n naturel supérieur à N , on aura :

$$u_n \geq A$$

On a montré que pour tout réel A , tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A .

Ce qui signifie que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

2. Par hypothèse, la suite (β_n) est (strictement) croissante. Si elle était majorée, elle convergerait vers un certain réel ℓ . Comme la fonction g est continue sur $]0, +\infty[$, un passage à la limite dans l'égalité $n = g(\beta_n)$ nous donnerait :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(\beta_n) = g(\ell)$$

Or $g(\ell)$ est un nombre fini, d'où une contradiction. Donc la suite (β_n) n'est pas majorée.

D'après la question 1, on en déduit donc que la suite (β_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 4 (5 points)

1. En remarquant que $8 = 2^3$, l'identité $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ permet de factoriser l'équation :

$$z^3 = 8$$

$$z^3 - 2^3 = 0$$

$$(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$$

$$z = 2 \text{ ou } z^2 + 2z + 4 = 0$$

On résout, dans \mathbb{C} , l'équation du second degré $z^2 + 2z + 4 = 0$ en calculant son discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12$$

Le discriminant Δ est négatif, donc l'équation $z^2 + 2z + 4 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées :

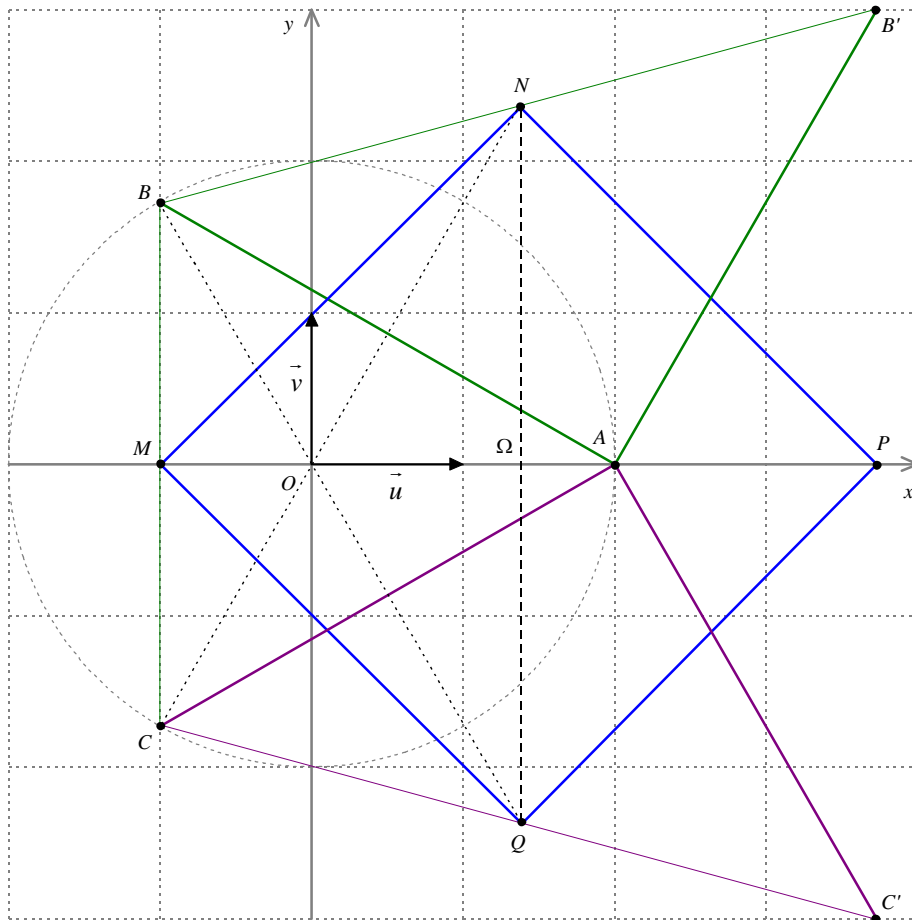
$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = -1 - i\sqrt{3} = 2\mathbf{j}^2 \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = -1 + i\sqrt{3} = 2\mathbf{j}$$

L'ensemble S des solutions de l'équation $z^3 = 8$ est :

$$S = \{2 ; -1 - i\sqrt{3} ; -1 + i\sqrt{3}\} = \{2 ; 2\mathbf{j} ; 2\mathbf{j}^2\}$$

$$\mathbf{j} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. a. Figure



- b. L'écriture complexe de la rotation r' de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est :

$$z' - a = -\mathbf{i}(z - a)$$

L'affixe b' de $B' = r'(B)$ est donc donnée par :

$$b' - a = -\mathbf{i}(b - a)$$

$$b' = -\mathbf{i}(-1 + \mathbf{i}\sqrt{3} - 2) + 2 = 2 + \sqrt{3} + 3\mathbf{i}$$

- c. L'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est :

$$z' - a = \mathbf{i}(z - a)$$

L'affixe c' de $C' = r(C)$ est donc donnée par :

$$c' - a = \mathbf{i}(c - a)$$

$$c' = \mathbf{i}(-1 - \mathbf{i}\sqrt{3} - 2) + 2 = 2 + \sqrt{3} - 3\mathbf{i}$$

Les nombres complexes b' et c' sont bien conjugués.

3. a. L'affixe n du point N est donnée par :

$$n = \frac{b+b'}{2} = \frac{-1+i\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+3i}{2} = \frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+3)}{2} = \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{3}i(1+\sqrt{3})}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3})$$

On en déduit que :

$$n = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}c$$

En terme de vecteurs :

$$\overrightarrow{ON} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OC}$$

Ce qui prouve l'alignement des points O , N et C .

b. Comme d'une part b et c sont conjugués et d'autre part b' et c' le sont également, les segment $[BB']$ et $[CC']$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$. Le milieu Q de $[CC']$ est donc symétrique du milieu N de $[BB']$ par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$. Les nombres complexes n et q sont donc conjugués :

D'une part :

$$n+1 = \frac{(1+\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{2} + 1 = \frac{1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}+3i+2}{2} = \frac{3+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})}{2}$$

D'autre part :

$$i(q+1) = i\bar{n} + i = i\frac{(1+\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{2} + i = \frac{i+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3+2i}{2} = \frac{3+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})}{2}$$

Finalement :

$$n+1 = i(q+1)$$

Autrement dit :

$$n-m = i(q-m)$$

Le point N est l'image du point Q par le quart de tour direct de centre M .

On en déduit que le triangle MNQ est rectangle isocèle en M

c. Notons Ω le milieu du segment $[NQ]$. Comme n et q sont conjugués, l'affixe ω de Ω est réel et :

$$\omega = \operatorname{Re}(n) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Par ailleurs, le milieu de $[MP]$ a pour affixe :

$$\frac{m+p}{2} = \frac{-1+\operatorname{Re}(b')}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \omega$$

Le quadrilatère $MNPQ$ a ses diagonales perpendiculaires (car m et p sont réels d'une part et n et q ont la même partie réelle d'autre part) qui se coupent en leur milieu. C'est donc un losange. Et comme il possède un angle droit (question 3.b.), c'est un carré.