

Exercice 1

1. a. La fonction exponentielle est continue sur $[1, +\infty[$, la fonction $t \mapsto t$ est continue (puisque linéaire) et ne

s'annule pas sur $[1, +\infty[$, donc par quotient, la fonction $f : t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

(On peut aussi raisonner avec le produit de la fonction exponentielle et de la fonction inverse)

b. La fonction f est de la forme : $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(t) = e^t \\ v(t) = t \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1, +\infty[$, et v ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$ donc par quotient, la fonction f l'est aussi et on a :

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

D'où, pour tout réel t de $[1, +\infty[$: $f'(t) = \frac{e^t t - e^t}{t^2} = \frac{(t-1)e^t}{t^2}$

Comme l'exponentielle et la fonction carré sont des fonctions strictement positives sur $[1, +\infty[$, on a :

$$f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1$$

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

2. Restitution organisée de connaissances

a. $A(1)$ est l'aire (exprimée en u.a.) du domaine délimité par la courbe⁽¹⁾ représentant f , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations respectives $x = 1$ et $x = 1$. On a donc :

$$A(1) = 0$$

b. Soit $t \in [x_0, x_0 + h]$: $1 \leq x_0 \leq t \leq x_0 + h$

Comme f est croissante sur $[1, +\infty[$: $f(x_0) \leq f(t) \leq f(x_0 + h)$

On intègre ces inégalités pour t allant de x_0 à $x_0 + h$. Comme $x_0 < x_0 + h$, il vient :

$$f(x_0)h \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \leq f(x_0 + h)h$$

Mais d'après la relation de Chasles :

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = \int_{x_0}^1 f(t) dt + \int_1^{x_0+h} f(t) dt = A(x_0 + h) - A(x_0)$$

D'où, après division par $h > 0$:

$$f(x_0) \leq \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

c. On suppose maintenant $x_0 \in]1, +\infty[$ et $h < 0$ (avec $x_0 + h \geq 1$).

Soit $t \in [x_0 + h, x_0]$: $1 \leq x_0 + h \leq t \leq x_0$

Comme f est croissante sur $[1, +\infty[$: $f(x_0 + h) \leq f(t) \leq f(x_0)$

On intègre ces inégalités pour t allant de $x_0 + h$ à x_0 . Comme $x_0 + h < x_0$ il vient :

$$f(x_0 + h)(-h) \leq \int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt \leq f(x_0)(-h)$$

Le principe de cette démonstration est simple : on encadre l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = x_0$ et $x = x_0 + h$ par l'aire de deux rectangles de largeur commune h et de hauteurs respectives $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$.

⁽¹⁾ On peut bien parler de "courbe" ici (au lieu de représentation graphique) puisque f est continue.

Mais d'après la relation de Chasles :

$$\int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0+h}^1 f(t) dt + \int_1^{x_0} f(t) dt = A(x_0) - A(x_0 + h)$$

D'où, après division par $-h > 0$:

$$f(x_0 + h) \leq \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

- d. Comme f est continue en x_0 , on a : $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$

Le théorème des gendarmes appliqué à l'encadrement obtenu en b. ou en c. permet alors d'affirmer que

l'accroissement moyen $\frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h}$ admet une limite finie égale à $f(x_0)$, ce qui prouve que la

fonction A est dérivable en x_0 et que : $A'(x_0) = f(x_0)$

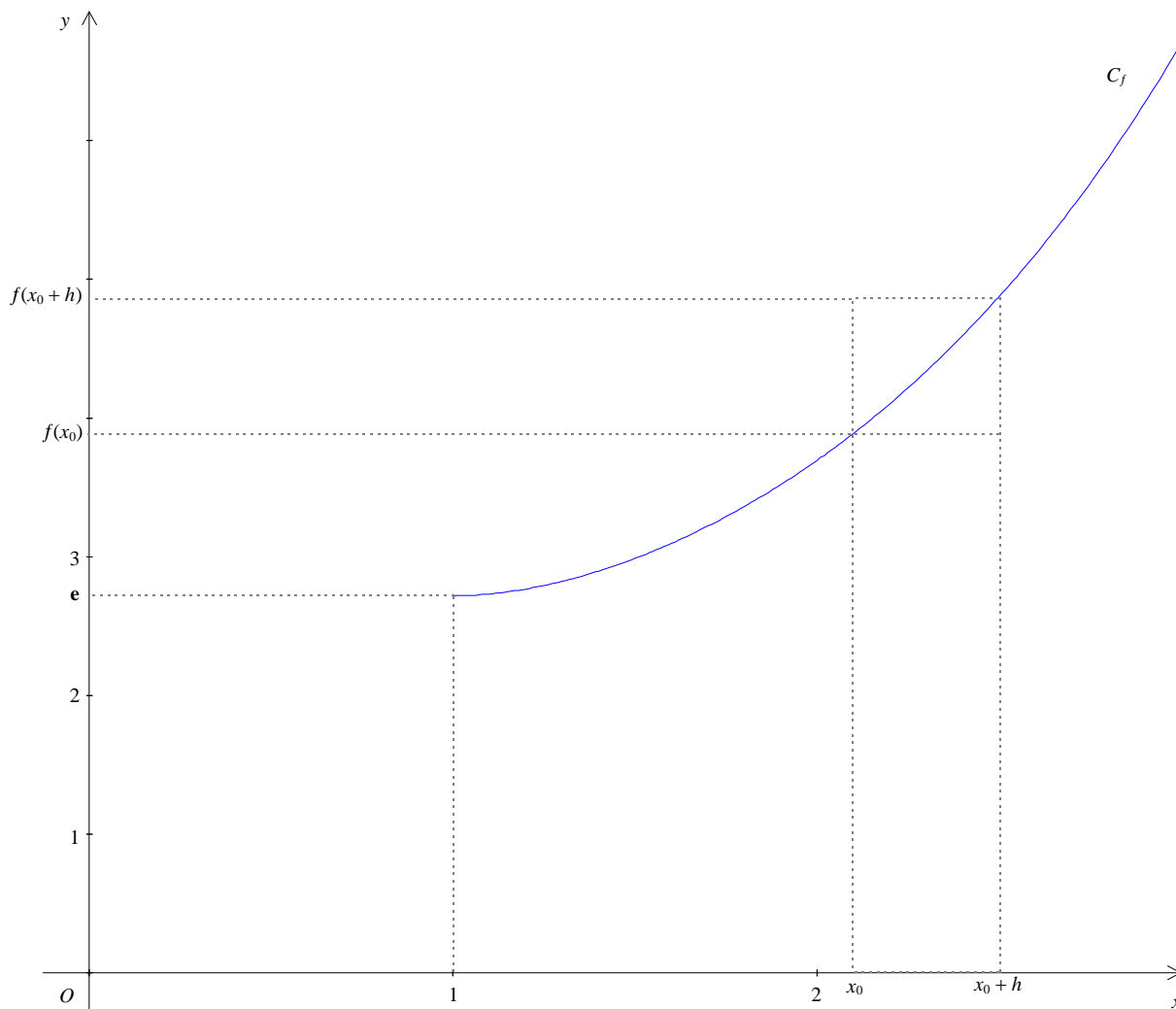
Remarque : lorsque $x_0 = 1$, il faut se contenter de la dérivabilité "à droite" de la fonction A .

- e. Le raisonnement ci-dessus étant valable pour toute abscisse x_0 de $[1, +\infty[$, on a donc :

$$A' = f \text{ sur } [1, +\infty[$$

Ce qui signifie bien que A est une primitive de f sur $[1, +\infty[$.

Illustration :



Exercice 2

1. Le centre $\Omega(z_\Omega)$ du cercle (C) est le milieu du diamètre $[AB]$. Son affixe est donc donnée par :

$$z_\Omega = \frac{z_A + z_B}{2} = -\frac{1}{2}$$

Le centre Ω du cercle (C) a pour affixe $-\frac{1}{2}$.

Le rayon R du cercle (C) est égal à la moitié du diamètre AB :

$$2R = AB = |z_B - z_A| = |-3 + 4i| = 5$$

$$R = \frac{5}{2}$$

2. On détermine la forme algébrique de z_D à l'aide du conjugué $4 - 2i$ de $4 + 2i$:

$$z_D = \frac{3 + 9i}{4 + 2i} = \frac{(3 + 9i)(4 - 2i)}{(4 + 2i)(4 - 2i)} = \frac{30 + 30i}{20} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

On calcule maintenant la distance ΩD :

$$\Omega D = |z_D - z_\Omega| = \left| 2 + \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2} = R$$

D'où :

$$D \in (C)$$

3. a. On a :

$$z_E + \frac{1}{2} = z_E - z_\Omega$$

On en déduit :

$$\left| z_E + \frac{1}{2} \right| = \Omega E$$

Et comme $E \in (C)$:

$$\left| z_E + \frac{1}{2} \right| = \Omega E = R = \frac{5}{2}$$

Par ailleurs :

$$\arg(z_E - z_\Omega) = (\overline{OI}, \overline{\Omega E}) [2\pi]$$

Et comme Ω, O et I sont alignés dans cet ordre :

$$\arg(z_E - z_\Omega) = (\overline{\Omega I}, \overline{\Omega E}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

En conclusion, on peut dire :

$$z_E + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

b. D'après ce qui précède :

$$z_E + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

D'où :

$$z_E = \frac{5\sqrt{2} - 2}{4} + i \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

4. a. En passant aux modules dans l'égalité $z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \left(z + \frac{1}{2} \right)$, on obtient :

$$|z' - z_\Omega| = |z - z_\Omega|$$

$$\Omega M' = \Omega M$$

Et en passant aux arguments : $\arg(z' - z_\Omega) = \frac{\pi}{4} + \arg(z - z_\Omega) [2\pi]$

$$(\overline{OI}, \overline{\Omega M'}) = \frac{\pi}{4} + (\overline{OI}, \overline{\Omega M}) [2\pi]$$

Et d'après la relation de Chasles pour les angles :

On rappelle que la transformation du plan dont l'écriture complexe est de la forme :

$$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$$

est une rotation de centre le point d'affixe ω et d'angle θ .

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

On en déduit que r est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b. L'affixe z' de $r(K)$ vérifie :

$$z' + \frac{1}{2} = e^{\frac{i\pi}{4}} \left(z_K + \frac{1}{2} \right)$$

Et comme $z_K = 2$:

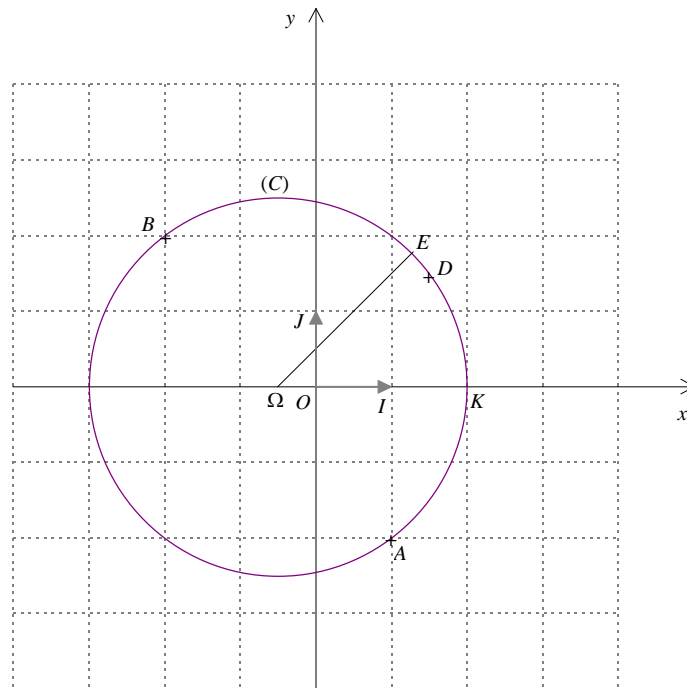
$$z' = \frac{5}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{1}{2} = z_E$$

La rotation r transforme donc K en E .

On pouvait retrouver géométriquement ce résultat car K étant le point du cercle (C) (en effet, on vérifie facilement que $\Omega K = \frac{5}{2}$) qui est tel que $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega K}) = 0 [2\pi]$, son image K' par r est donc le point de (C)

qui est tel que $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega K'}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ qui n'est autre que le point E .

Figure :



Exercice 2 Spécialité

1. On a donc :
$$x' + iy' = \frac{3+4i}{5}(x - iy) + \frac{1-2i}{5} = \frac{3x+4y+1+i(4x-3y-2)}{5}$$

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires :

$$\begin{cases} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$$

2. a. Un point M d'affixe $z = x + iy$ est invariant par f si et seulement si $f(M) = M$:

$$M \text{ invariant par } f \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=1 \\ 4x-8y=2 \end{cases}$$

Les deux dernières relations sont liées. Elles représentent la droite d'équation :

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

b. L'application f a une écriture complexe de la forme $z' = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$, c'est une symétrie axiale.

Son axe est l'ensemble des points invariants par f , c'est-à-dire la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

3. Le nombre complexe z' est réel si et seulement si sa partie imaginaire y' est nulle :

$$4x - 3y - 2 = 0$$

L'ensemble D est donc la droite d'équation : $y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

4. a. Le couple $(x_0 ; y_0) = (2 ; 2)$ est une solution particulière dans \mathbb{Z}^2 de l'équation $4x - 3y = 2$.

b. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution quelconque de $4x - 3y = 2$.

On a alors :

$$\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 4x_0 - 3y_0 = 2 \end{cases}$$

En retranchant membre à membre : $4(x - x_0) = 3(y - y_0)$

L'entier 3 divise donc le produit $4(x - x_0)$ et comme 3 et 4 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que l'entier 3 divise $x - x_0$. Il existe donc un entier k tel que :

$$x - x_0 = 3k$$

$$x = 3k + 2$$

On en déduit :

$$y = 4k + 2$$

Réciproquement, les couples $(x, y) = (3k + 2, 4k + 2)$, où $k \in \mathbb{Z}$, vérifient bien :

$$4x - 3y = 4(3k + 2) - 3(4k + 2) = 8 - 6 = 2$$

Bilan : les solutions (x, y) dans \mathbb{Z}^2 de l'équation $4x - 3y = 2$ sont les couples :

$$(x, y) = (3k + 2 ; 4k + 2) \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

5. $\text{Re}(z') = x'$ et $\text{Im}(z') = y'$ sont entiers si et seulement si :

$$3x + 4y + 1 \equiv 0 [5] \text{ et } 4x - 3y - 2 \equiv 0 [5]$$

Et comme $x = 1$:

$$4y + 4 \equiv 0 [5] \text{ et } 3y + 3 \equiv 0 [5]$$

$$5 \text{ divise } 4(y + 1) \text{ et } 3(y + 1)$$

Mais comme 4 et 5 sont premiers entre eux, et 3 et 5 également, on a d'après le théorème de Gauss :

$$5 \text{ divise } y + 1$$

$$y + 1 = 5k \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 5k - 1 \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 3

1. a. On calcule les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} :

$$\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

Comme les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles, ils ne sont pas colinéaires.

Donc les points A , B et C ne sont pas alignés.

- b. On calcule les produits scalaires suivants :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 0 + 4 \times 1 + (-2) \times 2 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times (-2) + 4 \times 1 + (-2) \times (-1) = 0$$

Le vecteur \vec{n} est donc orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

Le plan (ABC) a donc pour vecteur normal le vecteur \vec{n} .

On en déduit l'une de ses équations cartésiennes :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 3(x - 1) + 4y - 2(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 2z + 1 = 0$$

2. a. Un vecteur normal \vec{n}_1 au plan P_1 est :
- $$\vec{n}_1 \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Un vecteur normal \vec{n}_2 au plan P_2 est :

$$\vec{n}_2 \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{vmatrix}$$

Comme les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles),

les plans P_1 et P_2 sont non parallèles, donc sécants suivant une droite D .

On détermine un système d'équations paramétriques de D en résolvant le système :

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

Posons $z = t$, ainsi :

$$\begin{cases} 2x + y = -2t - 1 & L_1 \\ x - 2y = -6t & L_2 \\ z = t & L_3 \end{cases}$$

En remplaçant L_2 par $L_1 - 2L_2$:

$$\begin{cases} 2x + y = -2t - 1 \\ 5y = 10t - 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = -2t - 1 - 2t + \frac{1}{5} \\ y = 2t - \frac{1}{5} \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2t - \frac{2}{5} \\ y = 2t - \frac{1}{5} \\ z = t \end{cases}$$

- b. Soient Z le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}; 0\right)$ et $\vec{u} \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Ainsi, le système d'équations paramétriques de D ci-dessus s'écrit alors :

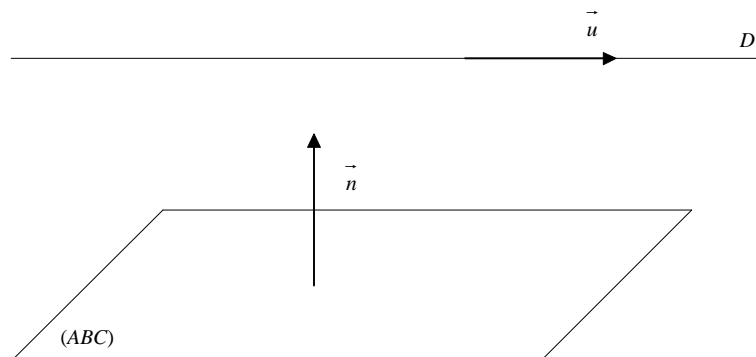
$$\overline{ZM} = t\vec{u}, t \in \mathbb{R}$$

Un vecteur directeur de la droite D est donc : $\vec{u} \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$

Pour connaître la position relative de la droite D (dirigée par \vec{u}) et du plan (ABC) de vecteur normal \vec{n} , on calcule le produit scalaire de \vec{n} et \vec{u} :

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 3 \times (-2) + 4 \times 2 - 2 \times 1 = 0$$

Comme \vec{n} et \vec{u} sont orthogonaux, la droite D est parallèle au plan (ABC) .



3. a. Comme la somme des coefficients $1 + 2 + t$ est non nulle (puisque $t \geq 0$), le barycentre G existe bien.

Les coordonnées de I sont données par :

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + 2x_B}{3} = 1 \\ y_I = \frac{y_A + 2y_B}{3} = \frac{2}{3} \\ z_I = \frac{z_A + 2z_B}{3} = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Comme G est le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 2), (C, t)\}$ et I celui de $\{(A, 1), (B, 2)\}$, la règle d'associativité permet d'écrire :

$$\begin{array}{|c|} \hline G \\ \hline 3+t \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 1 & 2 & t \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline I & C \\ \hline 3 & t \\ \hline \end{array}$$

On a donc :

$$3\overline{GI} + t\overline{GC} = \vec{0}$$

$$3\overline{GI} + t\overline{GI} + t\overline{IC} = \vec{0}$$

$$(3+t)\overline{GI} + t\overline{IC} = \vec{0}$$

$$\overline{IG} = \frac{t}{3+t} \overline{IC}$$

b. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par : $f(t) = \frac{t}{3+t}$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+ et : $f'(t) = \frac{3}{(3+t)^2}$

La fonction f est donc continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ avec :

$$f(0) = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$$

L'image de \mathbb{R}_+ par f est donc l'intervalle $[0 ; 1[$ (d'après le théorème de bijection).

Par conséquent, lorsque t décrit \mathbb{R}_+ , le point G décrit le segment $[IC]$ privé du point C .

Pour que le milieu J du segment $[IC]$ coïncide avec G , il faut et il suffit que :

$$\frac{t}{3+t} = \frac{1}{2}$$

$$2t = 3 + t$$

$$t = 3$$

Exercice 4

1. Pour tout entier naturel n non nul, on a les équivalences suivantes :

$$u_{n+1} \leq 0,95u_n \Leftrightarrow \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \leq 0,95 \frac{n^{10}}{2^n} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^{10}}{n^{10}} \leq 0,95 \frac{2^{n+1}}{2^n} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$$

2. a. La fonction f est de la forme : $f = u^n$ avec $\begin{cases} u(x) = 1 + \frac{1}{x} \\ n = 10 \end{cases}$

La fonction u est dérivable sur $[1, +\infty[$ donc la fonction f l'est également et :

$$f' = nu'u^{n-1}$$

D'où, pour tout x de $[1, +\infty[$: $f'(x) = -\frac{10}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^9$

On en déduit immédiatement que f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

D'où par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10} = 1$

b. Sur l'intervalle $[1, +\infty[$, la fonction f est continue (puisque dérivable) et strictement décroissante, donc bijective. De plus, on a : $f(1) = 2^{10} = 1024 > 1,9$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 < 1,9$

Par conséquent, il existe un unique réel α dans $[1, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 1,9$.

c. En effectuant un balayage à l'aide de la calculatrice, on obtient le tableau suivant :

x	1	2	...	14	15	16
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}$	1024	57,7 (à 10^{-1} près)	...	2,0 (à 10^{-1} près)	1,907 (à 10^{-3} près)	1,833 (à 10^{-3} près)

On constate que : $\alpha \in]15 ; 16[$

L'entier naturel n_0 vérifiant $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$ est donc :

$$n_0 = 16$$

d. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a par décroissance de la fonction f sur $[16, +\infty[$:

$$f(n) \leq f(16)$$

Et comme $f(16) \leq 1,9$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$$

3. a. Pour tout $n \geq 16$, on a donc, d'après la question 1 :

$$u_{n+1} \leq 0,95u_n$$

D'où :

$$u_{n+1} \leq u_n$$

La suite (u_n) est décroissante sur l'intervalle $\llbracket 16, +\infty \rrbracket$.

b. Comme de plus la suite (u_n) est minorée par 0, elle converge (vers un réel ℓ positif).

4. On considère la propriété \wp définie pour $n \geq 16$ par :

$$\wp(n) : 0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16}u_{16}$$

- On a, bien sûr, $\wp(16)$ puisque $0 \leq u_{16} \leq 0,95^0u_{16}$.
- Supposons $\wp(n)$ pour un certain entier $n \geq 16$:

$$0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16}u_{16}$$

En multipliant par 0,95 :

$$0 \leq 0,95u_n \leq 0,95^{(n+1)-16}u_{16}$$

Et comme pour $n \geq 16$, on a $0 \leq u_{n+1} \leq 0,95u_n$, il vient :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 0,95^{(n+1)-16}u_{16}$$

D'où $\wp(n+1)$.

La propriété \wp est initialisée au rang 16 et héréditaire à partir du rang 16, elle est donc vraie pour entier n supérieur ou égal à 16.

Comme $0,95 \in]-1 ; 1[$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^{n-16} = 0$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^{n-16}u_{16} = 0$$

Du théorème des gendarmes, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Remarque : si le seul objectif est de prouver la convergence de la suite (u_n) vers 0, on peut procéder en posant :

$$v_n = \ln(u_n) = 10 \ln n - n \ln 2 = n \left(10 \frac{\ln n}{n} - \ln 2 \right)$$

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ et $\ln 2 > 0$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{v_n} = 0$$