

**Exercice 1** (5 points)

Bien que ce ne soit pas demandé, des explications sont données ci-dessous pour justifier les réponses.

1. **VRAI.**

En effet, les coordonnées des trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  vérifient l'équation  $2x + 2y - z - 11 = 0$ .

2. **FAUX.**

Si c'était le cas, le vecteur  $\overrightarrow{DE} \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$  serait normal au plan  $(ABC)$ .

Or, d'après la question 1, un vecteur normal  $\vec{n}$  au plan  $(ABC)$  est  $\begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix}$  qui n'est pas colinéaire à  $\overrightarrow{DE}$ .

3. **VRAI.**

Il suffit d'examiner le produit scalaire des vecteurs  $\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{vmatrix}$  et  $\overrightarrow{CD} \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$  :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -2 \times (-2) + 0 \times (-1) + (-4) \times 1 = 4 - 4 = 0$$

Donc les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont orthogonales.

4. **FAUX.**

Si le point  $C(3, 1, -3)$  était sur la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - t \end{cases}$$

on aurait :

$$\begin{cases} 3 = -1 + 2t \\ 1 = -1 + t \\ -3 = 1 - t \end{cases}$$

Or, la première équation a pour solution  $t_1 = 2$  et la troisième pour solution  $t_3 = 4$ .

Le système n'a donc pas de solution.

Ce qui prouve que le point  $C$  n'est pas sur la droite proposée.

5. **VRAI.**

Il suffit d'examiner la colinéarité des vecteurs  $\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{vmatrix}$  et  $\overrightarrow{AI} \begin{vmatrix} -7 \\ 0 \\ -14 \\ 5 \end{vmatrix}$ .

On constate que  $\overrightarrow{AB} = \frac{10}{7} \overrightarrow{AI}$ . Donc ces vecteurs sont colinéaires.

Le point  $I$  est donc bien sur la droite  $(AB)$ .

## Exercice 2 (5 points)

### 1. a. Limite en $-\infty$

On a : 
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e e^{-x} = +\infty$$

Donc, par produit : 
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

La courbe  $\mathcal{C}$  n'admet donc pas d'asymptote horizontale en  $-\infty$ .

### Limite en $+\infty$

On a d'une part : 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

Et d'autre part : 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e e^{-x} = 0$$

D'où la présence d'une forme indéterminée.

Écrivons : 
$$f(x) = x^2 \times e \times e^{-x} = e \times \frac{x^2}{e^x}$$

On sait, d'après le cours que : 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

Donc, par inverse : 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

Et finalement : 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

La courbe  $\mathcal{C}$  admet donc une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$  (axe des abscisses) en  $+\infty$ .

- b. La fonction  $x \mapsto 1 - x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (c'est une fonction affine) et la fonction exponentielle l'est également par définition. Donc, par composition, la fonction  $v : x \mapsto e^{1-x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $u : x \mapsto x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (c'est une fonction polynôme), donc par produit, la fonction  $f = uv$  l'est également.

On aura alors : 
$$f' = u'v + uv'$$

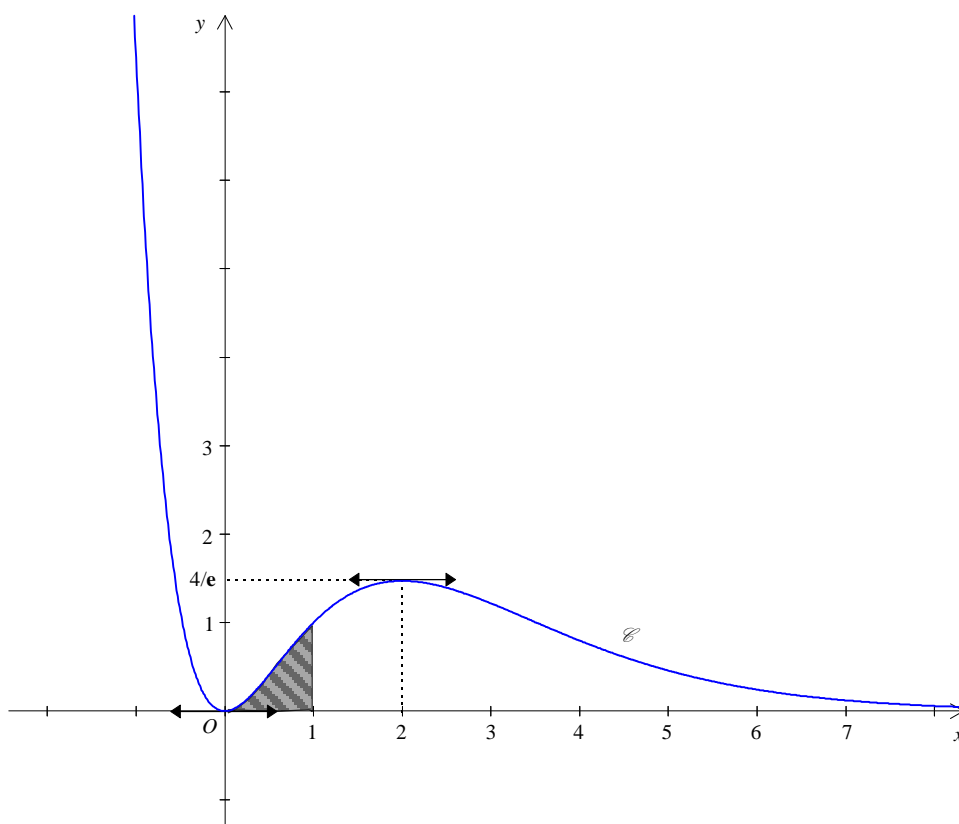
Ce qui donne : 
$$f'(x) = 2x \times e^{1-x} + x^2 \times (-e^{1-x})$$

$$f'(x) = x e^{1-x} (2 - x)$$

- c. Tableau de signe de  $f'$  et de variation de  $f$ .

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$	Justification des signes			
Signe de $x$	—	0	+	+				
Signe de $e^{1-x}$	+	+	+	+	La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$			
Signe de $(2-x)$	+	+	0	—	$2-x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq x$			
Signe de la dérivée $f'$	—	0	+	0	—			
Variations de la fonction $f$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4/e	$\searrow$	0	

Représentation graphique de la fonction  $f$  :



2. a) On a :

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx$$

Posons :

$$u(x) = x^{n+1} \quad \text{et} \quad v'(x) = e^{1-x}$$

$$u'(x) = (n+1)x^n \quad \text{et} \quad v(x) = -e^{1-x}$$

Une intégration par parties donne :

$$I_{n+1} = \left[ -x^{n+1} e^{1-x} \right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

$$I_{n+1} = -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$$

Notons que tout ceci est encore valable pour  $n = 0$  en notant  $I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx$ .

b) On a :

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx = \left[ -e^{1-x} \right]_0^1 = \left[ e^{1-x} \right]_1^0 = e - 1$$

Puis en utilisant la relation vue à la question précédente :

$$I_1 = -1 + I_0 = e - 2$$

$$I_2 = -1 + 2I_1 = 2e - 5$$

c) Le nombre  $I_2$  représente l'aire (en u.a.) située entre la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 1$ . On a  $I_2 \simeq 0,44$  u.a. à  $10^{-2}$  près.

3. a. Pour tout  $x$  de  $[0 ; 1]$ , on a :  $0 \leq x \leq 1$   
 Multiplions par  $(-1)$  :  $-1 \leq -x \leq 0$   
 Ajoutons 1 :  $0 \leq 1 - x \leq 1$   
 Puis, par croissance de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$  :

$$1 \leq e^{1-x} \leq e$$

Et enfin, en multipliant par  $x^n$  qui est positif puisque  $x$  est élément de  $[0 ; 1]$  :

$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$$

- b. On intègre cet encadrement entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq e \int_0^1 x^n dx$$

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

Or, on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

## **Exercice 2** Spécialité (5 points)

### **- Partie A -**

#### **1. Théorème de Bézout**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs (non nuls).

Les entiers  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si et seulement si il existe un couple  $(u, v)$  d'entiers relatifs tels que :

$$au + bv = 1$$

#### **Théorème de Gauss**

Soient  $a, b$  et  $c$  trois entiers relatifs (non nuls).

Si  $a$  divise  $bc$  et si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux alors  $a$  divise  $c$ .

#### **2. Démonstration du théorème de Gauss à partir du théorème de Bézout**

Comme  $a$  divise  $bc$ , il existe un entier  $k$  tel que :

$$ak = bc$$

Par ailleurs, comme  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, il existe (d'après le théorème de Bézout) un couple  $(u, v)$  d'entiers relatifs tel que :

$$au + bv = 1$$

En multipliant par  $c$  :

$$acu + bcv = c$$

D'où :

$$acu + akv = c$$

$$a(cu + kv) = c$$

Ce qui signifie que  $a$  divise  $c$ .

**- Partie B -**

1. Comme 12 et 19 sont premiers entre eux, il existe (d'après le théorème de Bézout) un couple  $(u, v)$  d'entiers relatifs tel que :

$$19u + 12v = 1$$

On a en raisonnant modulo 19 :  $N \equiv 13 \times 12v \equiv 13 \pmod{19}$

Et en raisonnant modulo 12 :  $N \equiv 6 \times 19u \equiv 6 \pmod{12}$

Le nombre  $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$  est bien une solution de (S).

2. a. Puisque  $n_0$  et  $n$  sont des solutions de (S), on a :

$$\begin{cases} n_0 \equiv 13 \pmod{19} \\ n_0 \equiv 6 \pmod{12} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$$

D'où, par différence :

$$\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$$

Réciproquement, si on a  $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$ , alors comme par ailleurs  $\begin{cases} n_0 \equiv 13 \pmod{19} \\ n_0 \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$ , on obtient par transitivité :

$$\begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$$

Le système (S) est bien équivalent à  $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$ .

b. Supposons que  $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$ .

Alors il existe un entier  $k$  tel que  $n = n_0 + 19k$  et un entier  $h$  tel que  $n = n_0 + 12h$ .

On a alors :  $19k = 12h$

Donc 12 divise 19k et comme 12 et 19 sont premiers entre eux, on en déduit, d'après le théorème de Gauss que 12 divise  $k$ . Il existe donc en entier relatif  $a$  tel que  $k = 12a$ .

D'où :  $n = n_0 + 19 \times 12a$

$$n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$$

Réciproquement, si  $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$  alors  $n \equiv n_0 \pmod{12}$  et  $n \equiv n_0 \pmod{19}$  donc  $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$ .

3. a. Il suffit d'examiner les tables de 12 et de 19 :

Table de 12	12	24	36	48	60	72	84	96
Table de 19	19	38	57	76	95	114	133	...

On constate que :  $(-5) \times 19 = 95$  et  $8 \times 12 = 96$

Le couple  $(u, v) = (-5, 8)$  est tel que  $19u + 12v = 1$ .

On a alors :  $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u = 678$

Remarque : la méthode classique pour trouver un couple  $(u, v)$  est l'algorithme d'Eulide-Bézout :

i) On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$19 = 1 \times 12 + 7$$

$$12 = 1 \times 7 + 5$$

$$7 = 1 \times 5 + 2$$

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

$$2 = 2 \times 2 + 0$$

Le PGCD est le  
dernier reste non nul.

ii) une fois qu'on obtient l'égalité avec le PGCD, on remonte dans les égalités précédentes pour obtenir une égalité reliant le PGCD aux deux entiers initiaux :

$$1 = 5 - 2 \times 2$$

L'entier 2 ne nous intéresse pas, on le remplace par une expression contenant 7 et 5 :

$$1 = 5 - 2 \times (7 - 1 \times 5) = -2 \times 7 + 3 \times 5$$

On peut remplacer 5 par son expression en fonction de 12 et 7 :

$$1 = -2 \times 7 + 3 \times (12 - 1 \times 7) = 3 \times 12 - 5 \times 7$$

Et enfin, on remplace 7 par  $19 - 1 \times 12$  :

$$1 = 3 \times 12 - 5 \times (19 - 1 \times 12) = 8 \times 12 - 5 \times 19$$

On a trouvé une identité de Bézout :

$$19 \times (-5) + 12 \times 8 = 1$$

$\downarrow$   
 $u$

$\downarrow$   
 $v$

b. Le nombre  $N = 678$  est donc une solution particulière du système  $(S)$ . Par ailleurs, d'après la question 2.b., le système  $(S)$  équivaut à  $n \equiv N \pmod{12 \times 19}$ , c'est-à-dire  $n \equiv 678 \pmod{228}$ .

Or,  $228 \times 2 = 456$  donc :

$$n \equiv 678 - 456 \pmod{228}$$

$$n \equiv 222 \pmod{228}$$

Les solutions du système  $(S)$  sont donc les entiers relatifs de la forme :

$$n = 222 + 228k \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

4. Un tel entier (dont le reste de la division par 12 est 6 et le reste de la division par 19 est 13) est tel que :

$$n = 222 + 228k$$

Le reste de la division de  $n$  par 228 est donc **222**.

### Exercice 3 (5 points)

#### 1. Questions de cours

a) À l'aide du premier pré-requis, on peut écrire :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) + \arg(z') = \arg\left(\frac{z}{z'} \times z'\right) = \arg(z) \quad [2\pi]$$

D'où :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

b) À l'aide du résultat précédent, on a :

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) \quad [2\pi]$$

À l'aide de second pré-requis, cela donne :

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\vec{u} ; \overline{AC}) - (\vec{u} ; \overline{AB}) \quad [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\vec{u} ; \overline{AC}) + (\overline{AB} ; \vec{u}) \quad [2\pi]$$

Et d'après la relation de Chasles sur les angles :

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\overline{AB} ; \overline{AC}) \quad [2\pi]$$

2. a. On a, pour tout  $z$  différent de 0 :  $z' \bar{z} = 1$

En passant aux arguments et en utilisant le pré-requis 1 :

$$\arg(z' \bar{z}) = \arg(1) \quad [2\pi]$$

$$\arg(z') + \arg(\bar{z}) = 0 \quad [2\pi]$$

$$\arg(z') = -\arg(\bar{z}) \quad [2\pi]$$

Et d'après les propriétés des arguments :

$$\arg(z') = \arg(z) \quad [2\pi]$$

Cela signifie donc que :  $(\vec{u} ; \overline{OM'}) = (\vec{u} ; \overline{OM}) \quad [2\pi]$

$$(\overline{OM} ; \vec{u}) + (\vec{u} ; \overline{OM'}) = 0 \quad [2\pi]$$

$$(\overline{OM} ; \overline{OM'}) = 0 \quad [2\pi]$$

Les points  $O$ ,  $M$  et  $M'$  appartiennent donc à une même demi-droite d'origine  $O$ .

b. Il s'agit de résoudre l'équation aux points fixes.

Pour tout  $z \neq 0$ , on a les équivalences suivantes :

$$z' = z$$

$$\frac{1}{z} = z$$

$$1 = z \bar{z}$$

$$|z|^2 = 1$$

Et comme  $|z| \geq 0$  :  $|z| = 1$

L'ensemble des points  $M$ , qui sont fixes par  $f$ , est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

c. Comparons les produits en croix (et remarquons que  $z'\bar{z} = 1$ ) :

$$\mathbf{i}(z' - 1)(\bar{z} + \mathbf{i}) = \mathbf{i}(1 + \mathbf{i}z' - \bar{z} - \mathbf{i}) = \mathbf{i} - z' - \mathbf{i}\bar{z} + 1$$

Par ailleurs :  $(z' - \mathbf{i})(\bar{z} - 1) = 1 - z' - \mathbf{i}\bar{z} + \mathbf{i}$

On a donc :  $\mathbf{i}(z' - 1)(\bar{z} + \mathbf{i}) = (z' - \mathbf{i})(\bar{z} - 1)$

Et comme  $z \neq \mathbf{i}$ , on peut écrire :  $\frac{z' - 1}{z' - \mathbf{i}} = \frac{1}{\mathbf{i}} \frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} + \mathbf{i}}$

Et d'après les propriétés de la conjugaison :

$$\frac{z' - 1}{z' - \mathbf{i}} = -\mathbf{i} \frac{\overline{z - 1}}{z - \mathbf{i}} = -\mathbf{i} \overline{\left( \frac{z - 1}{z - \mathbf{i}} \right)}$$

En passant aux arguments, nous obtenons :

$$\arg\left(\frac{z' - 1}{z' - \mathbf{i}}\right) = \arg(-\mathbf{i}) + \arg\left(\overline{\frac{z - 1}{z - \mathbf{i}}}\right) \quad [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z' - 1}{z' - \mathbf{i}}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arg\left(\frac{z - 1}{z - \mathbf{i}}\right) \quad [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z' - 1}{z' - \mathbf{i}}\right) + \arg\left(\frac{z - 1}{z - \mathbf{i}}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

3. a Le point  $M$  appartient à la droite  $(UV)$  privée de  $U$  et de  $V$  si et seulement si les vecteurs  $\overline{UM}$  et  $\overline{VM}$  sont colinéaires et **non nuls** donc :

$$M \in (UV) \setminus \{U; V\} \Leftrightarrow (\overline{VM}; \overline{UM}) = 0 \quad [\pi] \text{ et } M \neq U \text{ et } M \neq V$$

Et d'après la question 1.b. :

$$M \in (UV) \setminus \{U; V\} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - 1}{z - \mathbf{i}}\right) = 0 \quad [\pi] \text{ et } z \neq 1 \text{ et } z \neq \mathbf{i}$$

Or, un nombre complexe a un argument nul ou égal à  $\pi$  si et seulement si c'est un réel non nul.

Donc le point  $M$  appartient à la droite  $(UV)$  privée de  $U$  et de  $V$  si et seulement si  $\frac{z - 1}{z - \mathbf{i}}$  est un nombre réel non nul.

b. D'après la question 2.c., on a, pour tout  $z \neq 1$  et  $z \neq \mathbf{i}$  :

$$\arg\left(\frac{z' - 1}{z' - \mathbf{i}}\right) + \arg\left(\frac{z - 1}{z - \mathbf{i}}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Ce qui signifie :  $(\overline{VM'}; \overline{UM'}) + (\overline{VM}; \overline{UM}) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

Et *a fortiori* :  $(\overline{VM'}; \overline{UM'}) + (\overline{VM}; \overline{UM}) = -\frac{\pi}{2} \quad [\pi]$  (♥)

Si  $A = B \quad [2\pi]$ , alors il existe un entier  $k$  tel que  $A = B + 2k\pi$ , donc  $A = B \quad [\pi]$

Or, lorsque  $M$  appartient à la droite  $(UV)$  privée de  $U$  et de  $V$ , on a :

$$(\overline{VM}; \overline{UM}) = 0 \quad [\pi]$$

D'où :  $(\overline{VM'}; \overline{UM'}) = -\frac{\pi}{2} \quad [\pi]$

Le point  $M'$  est donc sur le cercle de diamètre  $[UV]$  privé des points  $U$ ,  $V$  et  $O$  (car  $z' \neq 1$ ,  $z' \neq \mathbf{i}$  et  $z' \neq 0$ ).

Réciproquement, soit  $M'$  un point de ce cercle (privé de  $U$ ,  $V$  et  $O$ ).

Déjà,  $M'$  admet un antécédent  $M$  par  $f$  puisque  $f$  est bijective (car  $f \circ f = \text{Id}$ ).

De plus :  $(\overline{VM'} ; \overline{UM'}) = -\frac{\pi}{2} [\pi]$  avec  $M' \neq U$  et  $M' \neq V$

D'où, d'après (♥) :  $(\overline{VM} ; \overline{UM}) = 0 [\pi]$

Donc  $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 [\pi]$  avec  $z \neq 1$  et  $z \neq i$

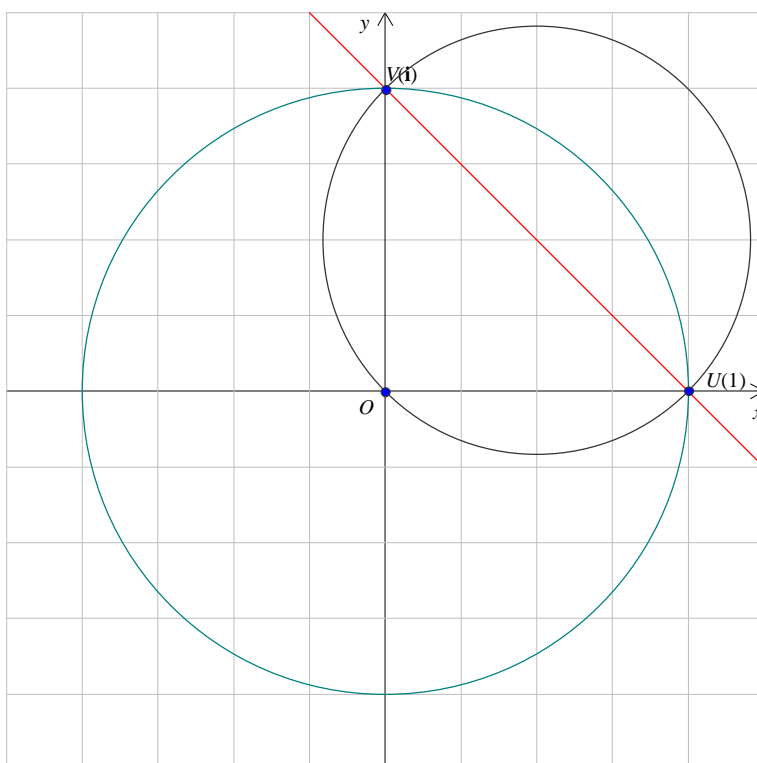
Donc  $M$  appartient à la droite  $(UV)$  privée de  $U$  et de  $V$ .

Conclusion :

**L'image de la droite  $(UV)$  privée de  $U$  et  $V$  est le cercle de diamètre  $[UV]$  privé de  $U$ , de  $V$  et de  $O$ .**

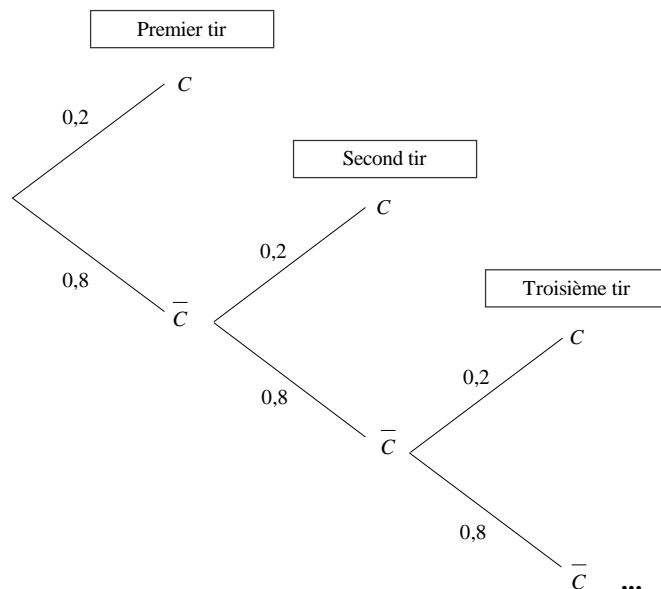
Tout point  $M'$ , d'affixe  $z' \neq 0$ ,  
admet un antécédent  $M$  par  $f$ .  
Cet antécédent a pour affixe :

$$z = \frac{1}{z'}$$



**Exercice 4** (5 points)

1. Notons  $C$  l'événement "le ballon est crevé". Faisons un arbre :



a. À chaque étape, la probabilité que le ballon soit intact est de 0,8. Comme les tirs sont indépendants, la probabilité que le ballon soit intact au bout de deux tirs est :

$$0,8^2 = 0,64 \quad (\text{Chemin } \bar{C} - \bar{C})$$

b. Il s'agit de l'événement contraire du précédent. En effet, si deux tirs n'ont pas suffit à crever le ballon, c'est qu'il est intact au bout de deux tirs. La probabilité est donc :

$$1 - 0,8^2 = 0,36$$

c. Calculons la probabilité de l'événement contraire, à savoir que le ballon soit intact au bout de  $n$  tirs :

$$1 - p_n = 0,8^n$$

D'où :

$$p_n = 1 - 0,8^n$$

d. On résout l'inéquation :

$$p_n > 0,99$$

$$1 - 0,8^n > 0,99$$

$$0,8^n < 0,01$$

Par stricte croissance de la fonction logarithme sur  $]0, +\infty[$  :

$$\ln(0,8^n) < \ln(0,01)$$

D'après la relation  $\ln(A^n) = n \ln(A)$  valable pour tout entier relatif  $n$  et tout réel strictement positif  $A$  :

$$n \ln(0,8) < \ln(0,01)$$

Or,  $\ln(0,8)$  est strictement négatif car 0,8 est élément de l'intervalle  $]0 ; 1[$  d'où :

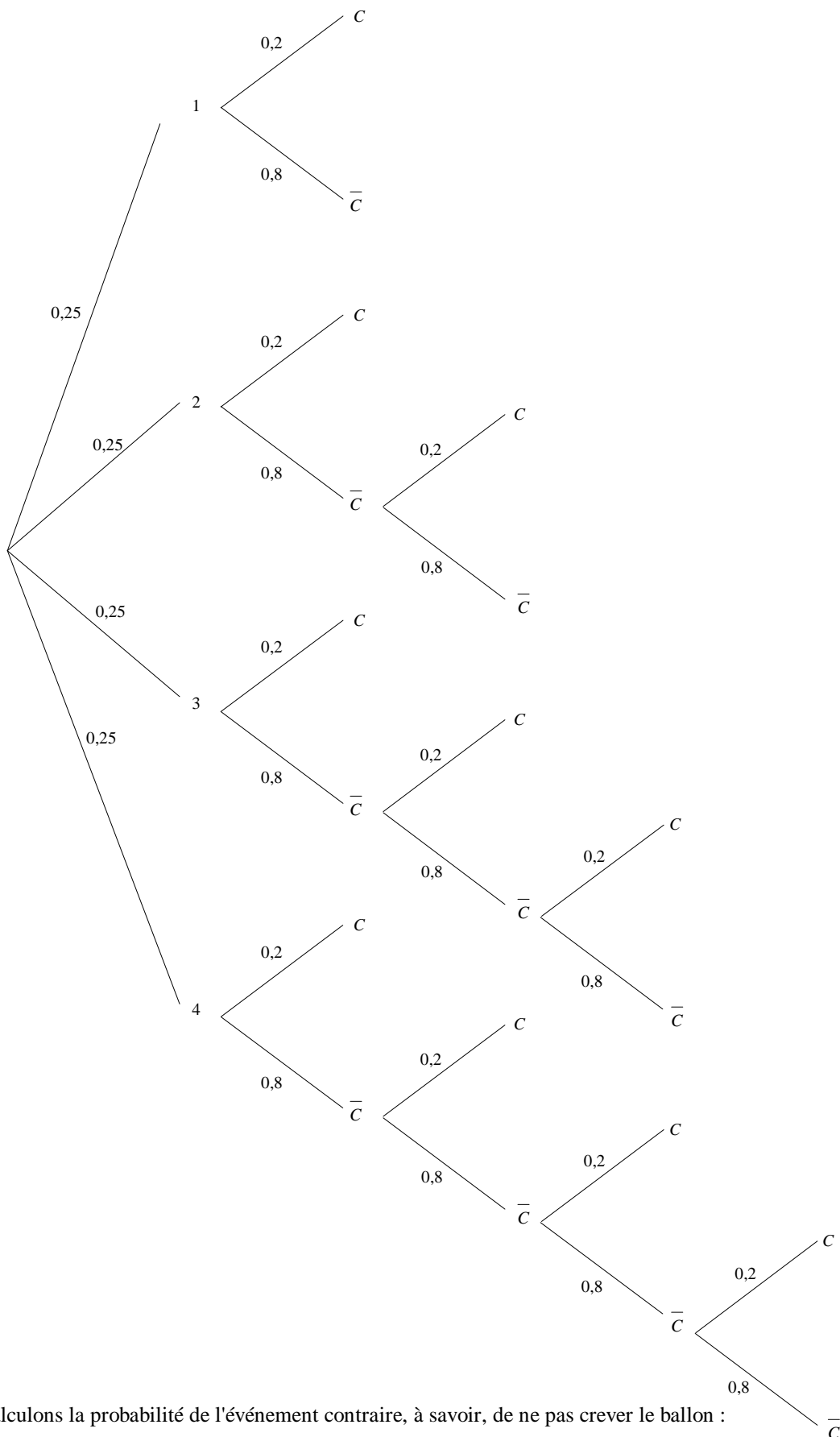
$$n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)}$$

La calculatrice donne  $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \simeq 20,64$  à  $10^{-2}$  près.

Et comme  $n$  est un entier naturel :  $n \geq 21$

Le tireur doit donc effectuer 21 tentatives pour être sûr, à 99%, de crever le ballon.

2. Reprenons l'arbre précédent en distinguant le nombre de tirs selon le résultat du dé :



Calculons la probabilité de l'événement contraire, à savoir, de ne pas crever le ballon :

$$1 - p = 0,25 \times (0,8 + 0,8^2 + 0,8^3 + 0,8^4)$$

D'où :

$$p = 0,4096$$

3. a. Tableau de la distribution des fréquences observées :

Face $k$	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face $k$	58	49	52	41
Fréquences $f_k$	0,29	0,245	0,26	0,205

b. Nous avons ici :

$$d^2 = (0,29 - 0,25)^2 + (0,245 - 0,25)^2 + (0,26 - 0,25)^2 + (0,205 - 0,25)^2 = 0,00375$$

c. Pour un risque de 10%, on compare notre  $d^2$  observé au 9 ème décile  $D_9$  ; ici, on a :

$$d^2 < D_9$$

On peut donc dire, avec un risque d'erreur 10%, que le dé est bien équilibré.

On ne peut donc pas considérer, avec un risque d'erreur de 10%, que ce dé est pipé.