

Exercice 1 (3 points)

1) Des vecteurs normaux respectifs \vec{n} et \vec{n}' aux plans (P) et (P') sont :

$$\vec{n} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n}' \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

On calcule le produit scalaire :

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 1 \times (-1) + 2 \times 1 + (-1) \times (1) = -1 + 2 - 1 = 0$$

Les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonaux. Ceci prouve que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

2) Pour déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans (P) et (P') (cette droite existe bien ici puisque ces plans sont perpendiculaires), on résout le système :

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 & (E_1) \\ -x + y + z = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Effectuons l'opération $(E_1) - (E_2)$:

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 & (E_1) \\ 3y + 1 = 0 & (E_3) \end{cases}$$

Posons $z = t$, ainsi :

$$\begin{cases} x + 2y - t + 1 = 0 \\ 3y = -1 \\ z = t \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} x + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - t + 1 = 0 \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$$

Et en remplaçant y par $-\frac{1}{3}$ dans la première équation :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$$

Remarque : puisque la représentation paramétrique était donnée dans l'énoncé, on pouvait procéder différemment en vérifiant que la droite (d) proposée est contenue simultanément dans le plan (P) et dans le plan (P') .

Examinons si $(d) \subset (P)$: $x + 2y - z + 1 = -\frac{1}{3} + t + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - t + 1 = 0$

Donc $(d) \subset (P)$.

Examinons si $(d) \subset (P')$: $-x + y + z = \frac{1}{3} - t - \frac{1}{3} + t = 0$

Donc $(d) \subset (P')$.

Comme les deux plans (P) et (P') sont sécants selon une droite, cette droite est bien (d) .

- 3) Nous savons que la distance $d(A, (P))$ entre un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et un plan (P) d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par la formule :

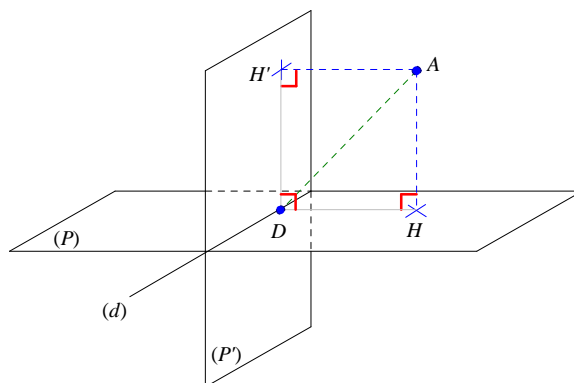
$$d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Dans notre cas, nous avons :

$$d(A, (P)) = \frac{|0 + 2 \times 1 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$d(A, (P')) = \frac{|-0 + 1 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- 4) Faisons une figure :



Notons H et H' les projetés orthogonaux de A sur (P) et (P') . Comme les plans (P) et (P') sont orthogonaux, le projeté orthogonal D de H sur (P') est confondu avec le projeté orthogonal de H' sur (P) . Le quadrilatère $AHDH'$ est donc un rectangle. La distance entre le point A et la droite d est donc la longueur AD , diagonale de ce rectangle, que nous pouvons calculer à l'aide du théorème de Pythagore :

$$AD^2 = AH^2 + AH'^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$

$$AD = \sqrt{2}$$

Exercice 2 (3 points)

- 1) **Restitution organisée de connaissance** : formule d'intégration par parties.

Nous savons que pour toutes fonctions u et v dérivables, à dérivées continues, sur un intervalle $[a ; b]$:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

En intégrant sur l'intervalle $[a ; b]$ cette égalité, nous obtenons :

$$\int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Et par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

D'où une formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

2) a) Procédons à une intégration par parties dans l'intégrale $I = \int_0^\pi e^x \sin(x) dx$ en posant :

$$u(x) = \sin(x) \text{ et } v'(x) = e^x$$

Ainsi : $u'(x) = \cos(x) \text{ et } v(x) = e^x$

(Les fonctions u et v sont dérivables et à dérivées continues, donc les intégrales en jeu ont bien un sens)

Une intégration par parties donne alors :

$$I = [e^x \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos(x) dx$$

$$I = e^\pi \sin(\pi) - e^0 \sin(0) - J$$

$$I = -J$$

Procédons à une seconde intégration par parties dans l'intégrale I en posant cette fois :

$$u(x) = e^x \text{ et } v'(x) = \sin(x)$$

Ainsi : $u'(x) = e^x \text{ et } v(x) = -\cos(x)$

Une intégration par parties donne alors :

$$I = [-e^x \cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \cos(x) dx$$

$$I = -e^\pi \cos(\pi) + e^0 \cos(0) + J$$

$$I = -e^\pi \times (-1) + 1 + J$$

$$I = J + e^\pi + 1$$

b) Pour en déduire les valeurs exactes de I et J , il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} I = -J \\ I = J + e^\pi + 1 \end{cases}$$

Nous obtenons très facilement : $2I = e^\pi + 1$

$$I = \frac{e^\pi + 1}{2} \text{ et } J = -\frac{e^\pi + 1}{2}$$

Exercice 3 (5 points)

- Partie A -

$$(E) : z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = 0$$

1) En remplaçant z par i , le calcul du membre du gauche donne :

$$i^3 - (4 + i)i^2 + (13 + 4i)i - 13i = -i + 4 + i + 13i - 4 - 13i = 0$$

Le nombre complexe i est donc une solution de l'équation (E).

2) Développons puis regroupons le membre de droite :

$$(z - i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - ai z^2 - bi z - ci = az^3 + (b - ai)z^2 + (c - bi)z - ci$$

Pour que cette quantité obtenue coïncide pour tout nombre complexe z avec $z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i$,

les conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - ai = -4 - i \\ c - bi = 13 + 4i \\ -ci = -13i \end{cases}$$

Nous obtenons facilement : $a = 1$; $c = 13$; $b = -4$

Ainsi, l'équation (E) s'écrit : $(z - i)(z^2 - 4z + 13) = 0$

3) Nous savons qu'un produit de nombre complexes est nul si et seulement si l'un des facteurs l'est :

$$z = \mathbf{i} \text{ ou } z^2 - 4z + 13 = 0$$

Le deuxième facteur nous donne une équation du second degré à coefficients réels que l'on peut résoudre dans \mathbb{C} en calculant son discriminant Δ ou plus simplement, ici, par canonisation puis factorisation :

$$\begin{aligned} z^2 - 4z + 13 &= 0 \\ (z - 2)^2 - 4 + 13 &= 0 \\ (z - 2)^2 + 9 &= 0 \\ (z - 2)^2 - (3\mathbf{i})^2 &= 0 \\ (z - 2 - 3\mathbf{i})(z - 2 + 3\mathbf{i}) &= 0 \\ z = 2 + 3\mathbf{i} \text{ ou } z = 2 - 3\mathbf{i} \end{aligned}$$

Au final, l'équation (E) possède trois solutions dans \mathbb{C} :

$$S = \{\mathbf{i} ; 2 + 3\mathbf{i} ; 2 - 3\mathbf{i}\}$$

- Partie B -

1) L'écriture complexe de la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ est :

$$z' = e^{i\theta} (z - \omega) + \omega$$

Ici, nous avons $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\omega = 2 + 3\mathbf{i}$. L'image A' du point A a donc pour affixe :

$$\begin{aligned} z_{A'} &= e^{i\frac{\pi}{4}} (z_A - 2 - 3\mathbf{i}) + 2 + 3\mathbf{i} \\ z_{A'} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \mathbf{i})(-2 - 2\mathbf{i}) + 2 + 3\mathbf{i} \\ z_{A'} &= -\sqrt{2} (1 + \mathbf{i})^2 + 2 + 3\mathbf{i} \\ z_{A'} &= -\sqrt{2} \times 2\mathbf{i} + 2 + 3\mathbf{i} \\ z_{A'} &= 2 + (3 - 2\sqrt{2})\mathbf{i} \end{aligned}$$

2) Les points A' , B et C ont tous les trois une affixe ayant une même partie réelle, à savoir 2. Ils sont donc alignés sur la droite d'équation $x = 2$.

Soit h l'homothétie de centre B qui transforme C en A' . Notons k son rapport. Nous devons avoir :

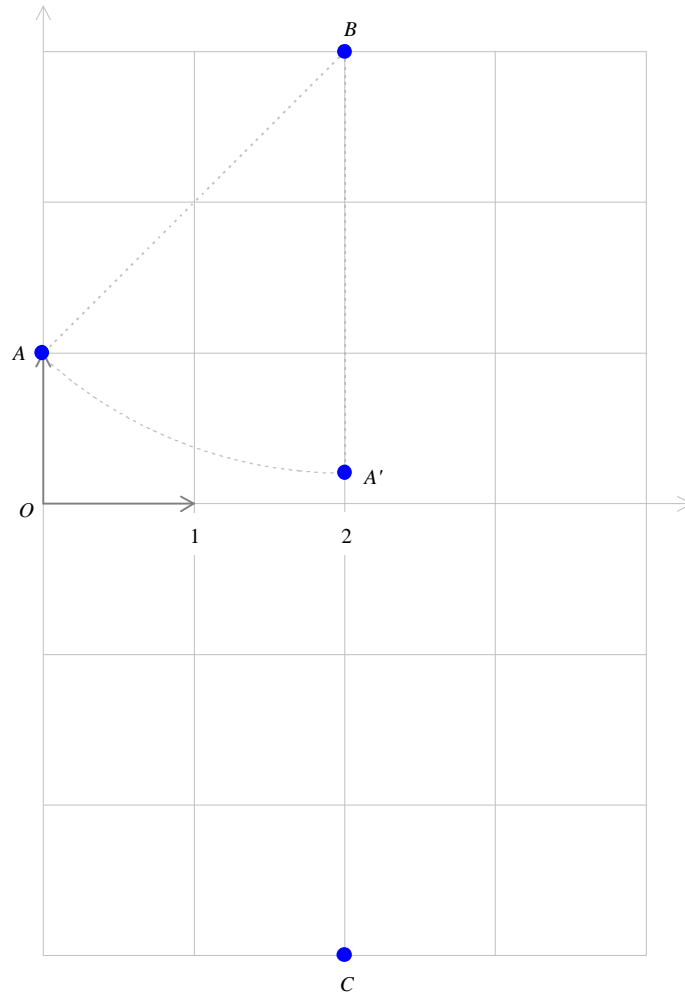
$$z_{A'} = k(z_C - z_B) + z_B$$

En raisonnant sur la partie imaginaire de ces deux membres :

$$\begin{aligned} (3 - 2\sqrt{2}) &= -6k + 3 \\ k &= \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

L'écriture complexe de cette homothétie h est donc :

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{3} (z - 2 - 3\mathbf{i}) + 2 + 3\mathbf{i}$$



Exercice 3 (5 points)

- Enseignement de spécialité -

1) Nous connaissons déjà le centre de cette similitude : A

Le rapport de cette similitude est donné par :

$$\frac{AH}{AC} = \frac{6}{\sqrt{8^2 + 8^2}} = \frac{6}{8\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

L'angle θ de cette similitude est donné par :

$$\theta = (\overline{AC}; \overline{AH}) = \arg\left(\frac{z_H - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg(z_H - z_A) - \arg(z_C - z_A) \quad [2\pi]$$

Or $z_H - z_A = -6i$, donc $\arg(z_H - z_A) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ et $z_C - z_A = 8 - 8i$ donc $\arg(z_C - z_A) = -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$.

D'où :

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

La similitude de centre A qui transforme le point C en le point H a pour rapport $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ et pour angle $-\frac{\pi}{4}$.

2) a) L'invariance des points A et C se traduit, en termes d'affixes, par les conditions :

$$\begin{cases} z_A = a\overline{z_A} + b \\ z_C = a\overline{z_C} + b \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre, il vient :

$$z_A - z_C = a(\overline{z_A} - \overline{z_C})$$

$$-8 + 8i = a(-8 - 8i)$$

$$a = \frac{8 - 8i}{8 + 8i} = -i$$

$$b = z_A - a \overline{z_A} = -5 + 6i + i(-5 - 6i) = 1 + i$$

L'écriture complexe de la similitude indirecte s est donc :

$$z' = -i \overline{z} + 1 + i$$

Une similitude indirecte ayant deux points invariants est une réflexion.

Ici, il s'agit de la réflexion d'axe (AC) .

b) On a donc :

$$E = s(H)$$

$$z_E = -i \times (-5) + 1 + i = 1 + 6i$$

c) Il suffit de calculer les longueurs FE et le rayon $R = FA$ du cercle Γ :

$$FE = |z_E - z_F| = |3 + 5i| = \sqrt{34}$$

$$FA = |z_A - z_F| = |-3 + 5i| = \sqrt{34}$$

Donc $E \in \Gamma$.

Remarque : on peut remarquer que H est l'orthocentre du triangle ABC . On a donc démontré ici une belle propriété : *le symétrique de l'orthocentre par rapport aux côtés du triangle appartient au cercle circonscrit à ce triangle.*

3) L'affixe I du milieu $[AC]$ est :

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = -1 + 2i$$

L'homothétie h de centre B et de rapport $k = \frac{2}{3}$ a pour écriture complexe :

$$z' = k(z - z_B) + z_B$$

Ce qui permet de calculer l'affixe du point $G = h(I)$:

$$z_G = \frac{2}{3}(z_I - z_B) + z_B = \frac{2}{3}(6 + 4i) - 7 - 2i = -3 + \frac{2}{3}i$$

Vérifions l'alignement des points H , G et F en comparant les affixes des vecteurs \overline{HG} et \overline{HF} :

$$z_{\overline{HG}} = 2 + \frac{2}{3}i$$

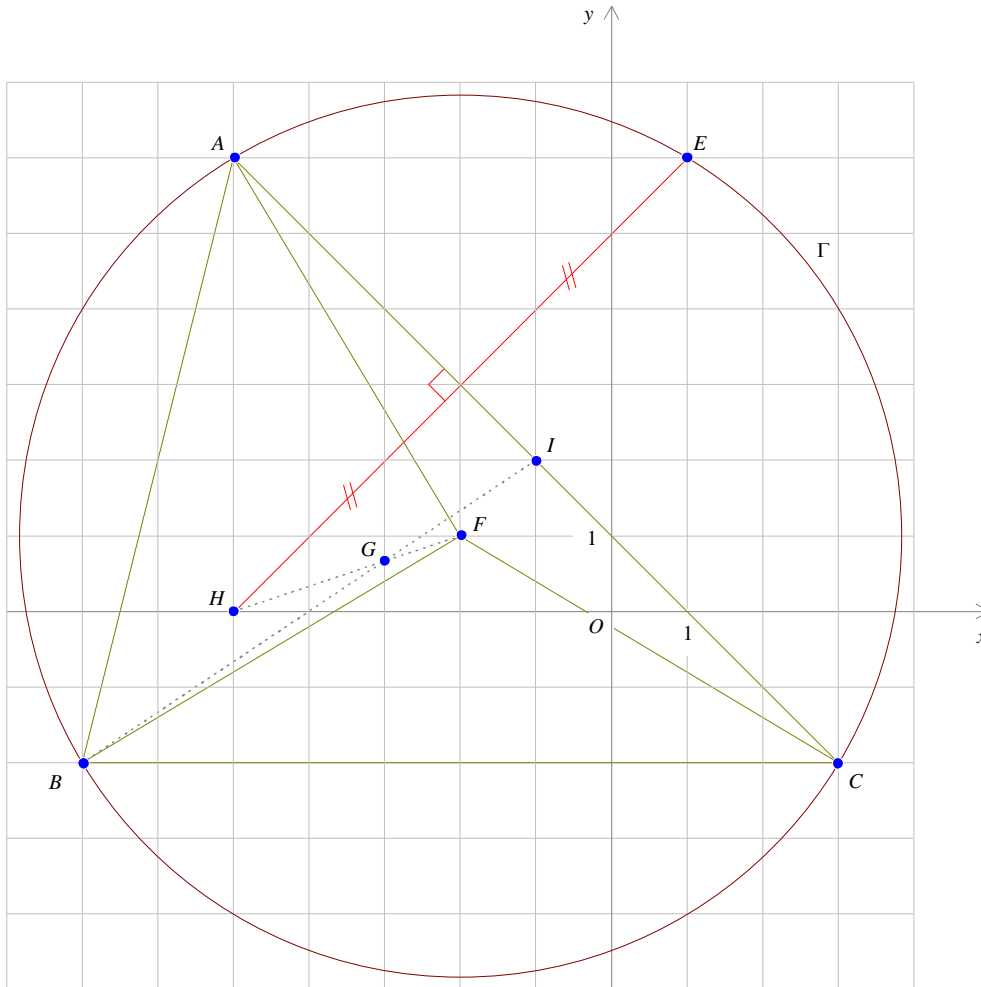
$$z_{\overline{HF}} = 3 + i$$

On constate que :

$$z_{\overline{HF}} = \frac{3}{2} z_{\overline{HG}}$$

$$\overline{HF} = \frac{3}{2} \overline{HG}$$

Les vecteurs \overline{HG} et \overline{HF} sont colinéaires donc les points H , G et F sont alignés.



Exercice 4 (4 points)

Bien que ce ne soit pas demandé, des explications sont données ci-dessous pour justifier les réponses.

1) On répète de manière indépendante $n = 5$ fois de suite une épreuve de Bernoulli (2 issues) :

Succès : le représentant vend son produit à un client donné

Échec : le représentant ne vend pas son produit à un client donné

La probabilité d'un succès est $p = 0,2$.

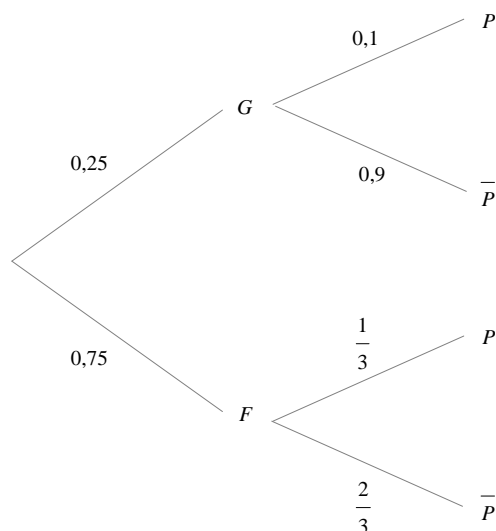
La variable aléatoire X comptant le nombre de succès suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,2$.

Ici, nous devons calculer :

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0,2^2 \times 0,8^3 = 0,2048$$

Réponse d

2) On dresse un arbre de cette situation (notations évidentes) :



D'après la formule des probabilités totales relativement à la partition $G \cup F$, nous avons :

$$p(P) = p(P \cap G) + p(P \cap F) = 0,1 \times 0,25 + \frac{1}{3} \times 0,75 = 0,275$$

Réponse b

3) Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle :

$$p_P(G) = \frac{p(G \cap P)}{p(P)} = \frac{0,025}{0,275} = \frac{1}{11} \simeq 0,091 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Réponse b

4) Les aires respectives des trois zones sont :

$$\text{Zone 10 : } \pi \times (10)^2 = 100\pi$$

$$\text{Zone 20 : } \pi \times (20)^2 - \pi \times (10)^2 = 400\pi - 100\pi = 300\pi$$

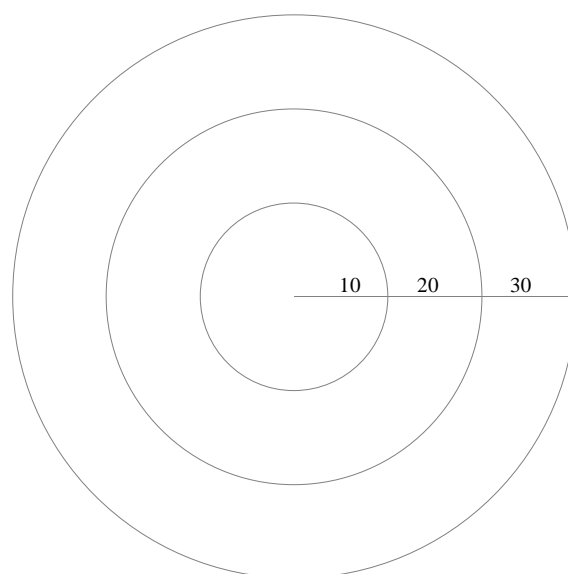
$$\text{Zone 30 : } \pi \times (30)^2 - \pi \times (20)^2 = 900\pi - 400\pi = 500\pi$$

La somme de ces aires est égale à 900π .

La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à :

$$\frac{500\pi}{900\pi} = \frac{5}{9}$$

Réponse a



Exercice 4 (4 points)

- Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe \mathcal{C} -

1) La fonction f est de la forme :

$$f = w - \frac{u}{v} \quad \text{où} \quad \begin{cases} u(x) = \ln(1+x) \\ v(x) = 1+x \\ w(x) = x \end{cases}$$

Les fonctions u , v et w sont dérivables sur $] -1 ; +\infty[$ (v et w sont affines, u est la composée d'une fonction affine et de la fonction logarithme) avec v qui ne s'annule pas sur $] -1 ; +\infty[$ donc la fonction f est dérivable (par différence et par quotient) et :

$$f' = w' - \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Ce qui donne pour tout x de $] -1 ; +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{(1+x) \times \frac{1}{1+x} - 1 \times \ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

2) La fonction N est bien définie et dérivable sur $] -1 ; +\infty[$ et :

$$N'(x) = 2(1+x) + \frac{1}{1+x}$$

Et puisque $x \in] -1 ; +\infty[$, on a $1+x > 0$ et donc $N'(x) > 0$.

Ce qui prouve que la fonction N est strictement croissante sur $] -1 ; +\infty[$.

Par ailleurs, nous avons : $N(0) = (1+0)^2 - 1 + \ln(1+0) = \ln(1) = 0$

Par conséquent, nous pouvons en déduire le signe de la fonction N , et par suite, celui de $f'(x)$:

x	-1	0	$+\infty$
Signe de N ou $f'(x)$		-	0
Variations de la fonction f			

3) L'abscisse du point d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} est donnée par la solution de l'équation :

$$f(x) = x$$

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$$

$$\ln(1+x) = 0$$

$$1+x = 1$$

$$x = 0$$

L'ordonnée du point d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} est donc $f(0) = 0$.

La courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} se coupent en l'origine O du repère.

- Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f -

1) Si $x \in [0 ; 4]$, cela signifie : $0 \leq x \leq 4$

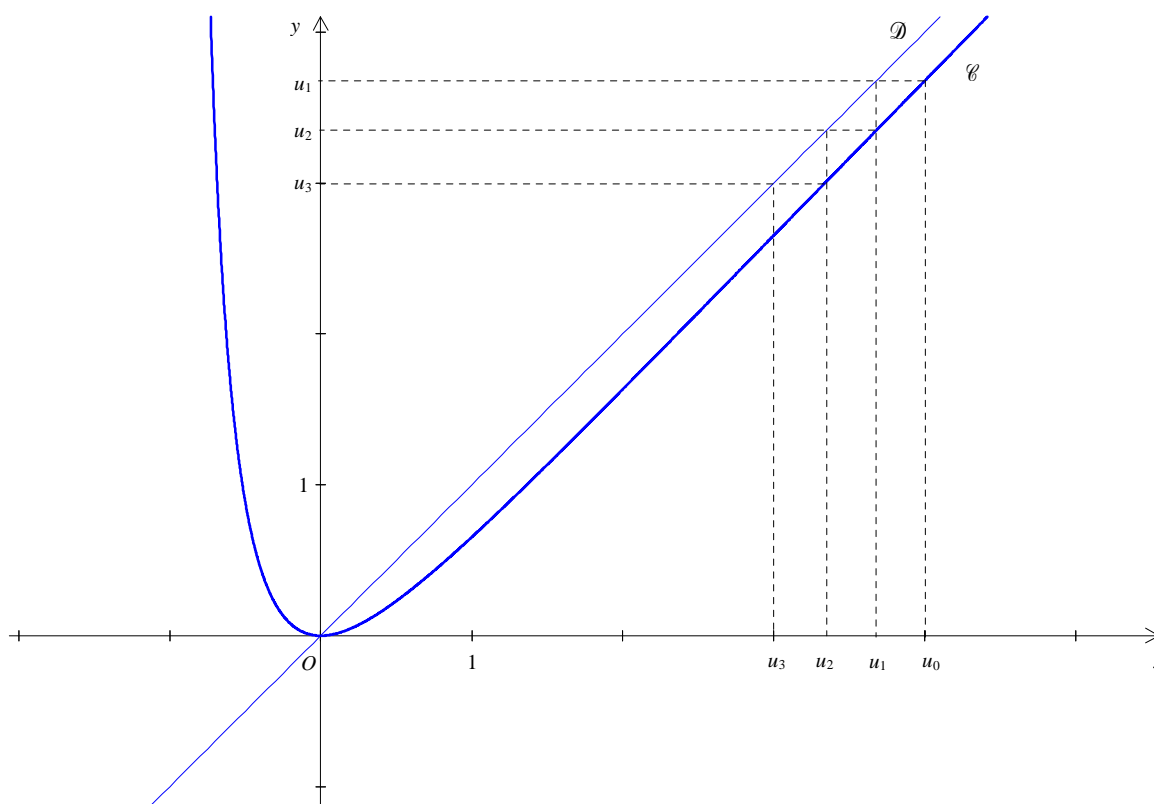
Comme la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 4]$, nous avons :

$$f(0) \leq f(x) \leq f(4)$$

Or, $f(0) = 0$ et $f(4) = 4 - \frac{\ln(5)}{5} \leq 4$ donc :

$$0 \leq f(x) \leq 4$$

2) a) La courbe \mathcal{C} permet de construire l'image u_{n+1} de u_n . La droite \mathcal{D} d'équation $y = x$ permet de reporter les images construites sur l'axe des ordonnées sur l'axe des abscisses.



b) Considérons la propriété P définie sur \mathbb{N} par :

$$P(n) : u_n \in [0 ; 4]$$

Puisque $u_0 = 4$, nous avons $P(0)$; la propriété P est initialisée en 0.

Supposons $P(n)$ pour un certain entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq 4$$

Mais d'après la question **B1**, on a alors : $0 \leq f(u_n) \leq 4$

C'est-à-dire : $0 \leq u_{n+1} \leq 4$

La propriété P est donc héréditaire pour tout entier naturel n .

D'après le principe de raisonnement par récurrence, on en déduit que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Conclusion : pour tout n de \mathbb{N} , on a : $u_n \in [0 ; 4]$

c) D'après le graphique, nous pouvons conjecturer que la suite (u_n) est décroissante.

Pour le prouver, on peut étudier, pour tout entier naturel n le signe de :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{\ln(1+u_n)}{1+u_n}$$

Or $u_n \in [0 ; 4]$ (question **B2b**) donc $1 + u_n \geq 1$ et $\ln(1 + u_n) \geq 0$. On en déduit :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

Remarque : on aurait pu combiner les questions **B2b** et **B2c** en démontrant, par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$

d) La suite (u_n) est décroissante (question **B2c**) et minorée par 0 (question **B2b**) donc elle converge vers un certain réel ℓ appartenant à l'intervalle fermé $[0 ; 4]$.

e) Nous savons que :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans cette égalité, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$$

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$$

Or, la fonction f est continue sur $[0 ; 4]$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

La limite ℓ de la suite (u_n) vérifie donc : $f(\ell) = \ell$

Or, d'après la question **A3**, l'équation $f(x) = x$ a une unique solution 0 sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ donc :

$$\ell = 0$$

On a prouvé que la suite (u_n) converge vers 0.