Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et Ω d'affixes respectives $a = -1 + \sqrt{3} + \mathbf{i}$ et $\omega = -1 + 2\mathbf{i}$.

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

I. Placer sur une figure, les points A et Ω , l'image B du point A par r, l'image C du point B par r et l'image D du point A par h.

II. On note b, c et d les affixes respectives des points B, C et D.

Le tableau ci-dessous contient un suite de 18 affirmations dont chacune débute dans la première colonne et s'achève sur la même ligne colonne 2, colonne 3 ou colonne 4.

Le candidat doit se prononcer sur chacune de ces affirmations. Pour cela, il doit remplir le tableau de la feuille annexe, en faisant figurer dans chacune des cases la mention VRAI ou FAUX (en toutes lettres).

1.	$\lvert a - \omega \rvert =$	2	4	$\sqrt{3} - \mathbf{i}$
2.	$\arg(a - \omega)$	$-\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{47\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{6}$

3.	$\left(\vec{v}, \overrightarrow{\Omega C}\right) =$	$\arg((\omega - c)\mathbf{i})$	$\left(-\vec{v}, \overrightarrow{C\Omega}\right)$	$\dfrac{2\pi}{3}$
4.	$\omega =$	$\dfrac{1}{3}(a + b + c)$	$a + b + c$	$b - 2\mathbf{i}$

5.	$\dfrac{b - d}{a - d} =$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i}$
6.	Le point D est l'image de Ω par	la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$	l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{3}{2}$	la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$

Exercice 2 **Obligatoire** (5 points)

Un commerce possède un rayon "journaux" et un rayon "souvenirs".

A la fin de chaque journée, on trie les pièces de monnaies contenues dans les caisses de chaque rayon.

On constate que la caisse de rayon "journaux" contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon "souvenirs".

Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face diffère et symbolise un des pays utilisant la monnaie unique.

Ainsi, 40% des pièces de 1 € dans la caisse du rayon "souvenirs" et 8% de celles du rayon "journaux" portent une face symbolisant un autre pays que la France (on dira "face étrangère")

1. Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère. Pour cela, il prélève au hasard, et avec remise, 20 pièces issues de la caisse "souvenirs". On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face étrangère.
   a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.
   b. Calculer la probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent un face étrangère.
   c. Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent un face étrangère.

2. Les pièces de 1 € issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac.
   On prélève au hasard une pièce du sac.
   On note S l'événement : "la pièce provient de la caisse souvenirs" et E l'événement "la pièce porte une face étrangère".
   a. Déterminer $P(S)$, $P_S(E)$; en déduire $P(S \cap E)$
   b. Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à 0,16.
   c. Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse "souvenirs".

3. Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à 0,16.
   Le collectionneur prélève n pièces (n entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise.
   Calculer n pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à 0,9.

Exercice 2 **Spécialité** (5 points)

On rappelle que 2003 est un nombre premier.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que :

$$123u + 2003v = 1$$

   b. En déduire un entier relatif k_0 tel que :

$$123k_0 \equiv 1 \ [2003]$$

   c. Montrer que, pour tout entier relatif x,

$$123x \equiv 456 \ [2003] \text{ si et seulement si } x \equiv 456k_0 \ [2003]$$

   d. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que :

$$123x \equiv 456 \ [2003]$$

   e. Montrer qu'il existe un unique entier n tel que :

$$1 \leqslant n \leqslant 2002 \text{ et } 123n \equiv 456 \ [2003]$$

2. Soit a un entier tel que : $1 \leqslant a \leqslant 2002$

   a. Déterminer : $\mathrm{PGCD}(a, 2003)$

   En déduire qu'il existe un entier m tel que :

$$am \equiv 1 \ [2003]$$

   b. Montrer que, pour tout entier b, il existe un unique entier x tel que :

$$0 \leqslant x \leqslant 2002 \text{ et } ax \equiv b \ [2003]$$

Problème (10 points)

Partie A : une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' - 3y = \frac{-3\mathbf{e}}{\left(1+\mathbf{e}^{-3x}\right)^2}$$

On donne une fonction φ dérivable sur ℝ et la fonction f définie sur ℝ par :

$$f(x) = \mathbf{e}^{-3x}\,\varphi(x)$$

1. Montrer que f est dérivable sur ℝ et pour tout réel x, exprimer $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.

2. Déterminer f de sorte que φ soit une solution de (E) sur ℝ et vérifie $\varphi(0) = \frac{\mathbf{e}}{2}$.

Partie B : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur ℝ par :

$$f(x) = \frac{\mathbf{e}^{1-3x}}{1+\mathbf{e}^{-3x}}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier les variations de f.
2. Tracer C.
3. Pour α réel non nul, on pose : $I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$
   a. Donner le signe et un interprétation graphique de I_α en fonction de α.
   b. Exprimer I_α en fonction de α.
   c. Déterminer la limite de I_α lorsque α tend vers $+\infty$.

Partie C : étude d'une suite

On définit, sur $\mathbb{N}^*$, la suite (u_n) par :

$$u_n = \int_0^1 f(x)\,\mathbf{e}^{\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x$$, où f est la fonction définie dans la **partie B**.

On ne cherchera pas à calculer u_n.

1. a. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le signe de u_n.
   b. Donner le sens de variation de la suite (u_n).
   c. La suite (u_n) est-elle convergente ?
2. a. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$I_1 \leqslant u_n \leqslant \mathbf{e}^{\frac{1}{n}}\,I_1$$

   où I_1 est l'intégrale de la **partie B** obtenue pour α égal à 1.
   b. En déduire la limite de la suite (u_n). Donner sa valeur exacte.

Document à rendre avec la copie

Annexe I

Compléter par VRAI ou FAUX

1.			
2.			

3.			
4.			

5.			
6.			