ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES SUR LES SUITES

I) Formules explicites

On connaît les premiers termes de quelques suites. Conjecturer, dans chaque cas, une formule explicite satisfaisante. (C'est-à-dire, une formule vérifiée par les premiers termes connus)

Suite (a_n)	Suite (b_n)	Suite (c_n)	Suite (d_n)	Suite (e_n)
$a_0 = 0$		$c_0 = 1$		$e_0 = 100$
$a_1 = 1$	$b_1 = -1$	$c_1 = 1{,}5 = \frac{3}{2}$	$d_1 = 1$	$e_1 = 20$
$a_2 = 4$	$b_2 = \frac{1}{2}$	$c_2 = 1{,}75 = \frac{7}{4}$	$d_2 = 3$	$e_3 = 4$
$a_3 = 9$	$b_3 = -\frac{1}{3}$	$c_3 = 1{,}875 = \frac{15}{8}$	$d_3 = 5$	$e_4 = 0{,}8$
$a_4 = 16$	$b_4 = \frac{1}{4}$	$c_4 = 1{,}9375 = \frac{31}{16}$	$d_4 = 7$	$e_5 = 0{,}16$
$a_5 = 25$	$b_5 = -\frac{1}{5}$	$c_5 = 1{,}96875 = \frac{63}{32}$	$d_5 = 9$	$e_6 = 0{,}032$
$\boldsymbol{a_n = ?}$	$\boldsymbol{b_n = ?}$	$\boldsymbol{c_n = ?}$	$\boldsymbol{d_n = ?}$	$\boldsymbol{e_n = ?}$

À l'aide des formules explicites obtenues, calculer, pour chacune des cinq suites ci-dessus, le terme d'indice 10 :

$a_{10} = ?$ $\quad b_{10} = ?$ $\quad c_{10} = ?$ $\quad d_{10} = ?$ $\quad e_{10} = ?$

II) Sens de variation d'une suite

On dit qu'une suite (u_n) est <u>strictement croissante</u> lorsque :

$$\text{pour tout entier } n : u_n < u_{n+1}$$

(pour tout entier n, le terme d'indice n est inférieur au terme d'indice $n + 1$)

1) Donner, selon vous, la définition d'une suite strictement décroissante.

2) a) Étudier, pour tout entier n, le signe de la différence $a_{n+1} - a_n$.

   Quel est le sens de variation de la suite (a_n) ?

   b) Procéder de même pour les suites (c_n), (d_n) et (e_n)

   c) Que peut-on dire de la suite (b_n) ?

III) Suite majorée, minorée, bornée

On dit qu'une suite (u_n) est <u>majorée</u> lorsque il existe un réel M tel que :

$$\text{pour tout entier } n : u_n \leqslant M$$

1) Donner, selon vous, la définition d'une suite minorée, puis d'une suite bornée.

2) a) Démontrer que la suite (a_n) est minorée par 0. Est-elle majorée ?

   b) Démontrer que la suite (b_n) est bornée. (On précisera un majorant et un minorant)

   c) Démontrer que la suite (c_n) est majorée par 2.

IV) Suite arithmétique

On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique lorsque il existe un réel r tel que :

$$\text{Pour tout entier } n : u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r s'appelle "la raison" de la suite arithmétique

Parmi les cinq suites ci-dessus, une seule est arithmétique. Dire laquelle et préciser sa raison r.

V) Suite géométrique

On dit qu'une suite (u_n) est géométrique lorsque il existe un réel q tel que :

$$\text{Pour tout entier } n : u_{n+1} = qu_n$$

Le réel q s'appelle "la raison" de la suite géométrique

Parmi les cinq suites ci-dessus, une seule est géométrique. Dire laquelle et préciser sa raison q.

VI) Relation de récurrence

Est appelée ainsi, toute relation reliant un terme de la suite (généralement u_{n+1}) avec le (ou des) précédent(s).

Exemple : soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n - 5$.

On a alors : $u_1 = 2u_0 - 5 = 15$; $u_2 = 2u_1 - 5 = 25$; $u_3 = 2u_2 - 5 = 45$ etc ...

Déterminer une relation de récurrence pour les suites (a_n), (c_n), (d_n) et (e_n)

VII) Calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite

On note (S_n) la suite définie par :

$$S_n = d_1 + d_2 + ... + d_n.$$

1) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.
2) Démontrer que : $S_n = n^2$

VIII) Limite d'une suite

On dit qu'une suite (u_n) admet une limite ℓ (ou converge vers ℓ) si :

tout intervalle ouvert de centre ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N.

Dans le cas contraire, on dit que la suite (u_n) diverge.

Quelles conjectures peut-on faire concernant la convergence des suites (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) et (e_n).