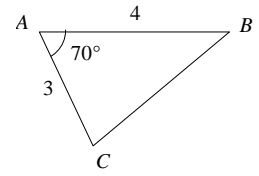


PRODUIT SCALAIRE

Exercice de motivation : ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) = 70^\circ$. Problème : calculer BC .



On ne peut pas utiliser le théorème de Pythagore car le triangle n'est pas rectangle. On verra, à la fin de ce chapitre, que le produit scalaire offre une solution à ce problème en généralisant le théorème de Pythagore à tout triangle.

I) Définition du produit scalaire (euclidien) et conséquences

Définition 1

On se place dans une base **orthonormée** du plan. Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs.

On appelle produit scalaire (euclidien) de \vec{u} et \vec{v} le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$$

Exemple : Avec $\vec{u}(1; 2)$ et $\vec{v}(2; 3)$, on obtient $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 6 = 8$.

Remarques :

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$. On notera parfois (convention) $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

De même, si A et B sont deux points, on a $\vec{AB} \cdot \vec{AB} = \|\vec{AB}\|^2$ et on notera parfois $\vec{AB}^2 = \|\vec{AB}\|^2$.

- Si l'un des deux vecteurs \vec{u} ou \vec{v} est nul alors le produit scalaire est nul. Mais attention, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ n'entraîne pas nécessairement ($\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$). (Considérer par exemple $\vec{u}(1; 2)$ et $\vec{v}(2; -1)$ pour s'en convaincre)
- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ($\vec{v} = k \vec{u}$) alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = x.kx + y.ky = k(x^2 + y^2) = k \|\vec{u}\|^2$.

Théorème 1 Autres expressions du produit scalaire

$$1. \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$2. \text{Lorsque } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}, \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$3. \text{Lorsque } \vec{u} \neq \vec{0}, \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}' \text{ où } \vec{v}' \text{ est le projeté orthogonal de } \vec{v} \text{ sur la direction donnée par } \vec{u}.$$

Démonstrations :

Notons $(x; y)$ et $(x'; y')$ les coordonnées respectives de \vec{u} et \vec{v} . On a alors :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 + 2(xx' + yy')$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

D'où l'expression 1.

Supposons maintenant que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:

Posons $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. Soit \vec{j} le vecteur tel que : $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$ et $\|\vec{j}\| = 1$.

Ainsi, nous avons ainsi construit une base (\vec{i}, \vec{j}) orthonormale directe.

Dans cette base (\vec{i}, \vec{j}) , on a, en notant $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$:

$$\vec{u} (\|\vec{u}\|, 0), \vec{v} (\|\vec{v}\| \cos \theta, \|\vec{v}\| \sin \theta) \text{ et } \vec{v}' (\|\vec{v}\| \cos \theta, 0)$$

D'où :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{v}' = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

D'où les expressions 2 et 3.

Exemples : dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on donne $A(1; 1)$, $B(4; 1)$ et $C(3; 3)$.

Vérifier avec les quatre expressions du produit scalaire que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6$.

Remarque : cas de vecteurs colinéaires : si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \quad \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires de même sens}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \quad \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires sens opposés.}$$

Théorème 2

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul :

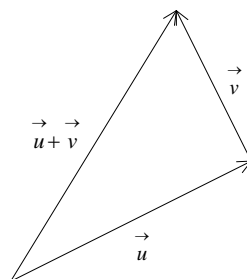
$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Démonstration : d'après le théorème de Pythagore, on a les équivalences suivantes :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux} \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \stackrel{\text{Théorème 1}}{\Leftrightarrow} 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Expression 1

Illustration :



II) Propriétés du produit scalaire

Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Bilinéarité (linéarité par rapport aux deux variables) :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \quad \text{et} \quad (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} \quad (\text{linéarité par rapport à la première variable})$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} \quad (\text{linéarité par rapport à la seconde variable})$$

Démonstration :

Symétrie : évident d'après la définition.

Bilinéarité : notons $(x; y)$, $(x'; y')$ et $(x''; y'')$ les coordonnées respectives de \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} .

$$\begin{aligned} \bullet \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} &= (x+x')x'' + (y+y')y'' = x x'' + x' x'' + y y'' + y' y'' \\ &= x x'' + y y'' + x' x'' + y' y'' = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda x x' + \lambda y y' = \lambda(x x' + y y') = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

La symétrie livre la linéarité par rapport à la seconde variable.

Exemple : $\vec{AB} \cdot \vec{BD} - \vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{CB} \cdot \vec{BD}$

Application : retrouver, à l'aide du produit scalaire, le fait que les hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes.

Notons A' , B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A , B et C sur (BC) , (AC) et (AB) et $H = (BB') \cap (CC')$.

On a clairement : $\vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0$ et $\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0$

On peut donc écrire : $\vec{BH} \cdot \vec{AC} = \vec{CH} \cdot \vec{AB}$

Introduisons le point A : $(\vec{BA} + \vec{AH}) \cdot \vec{AC} = (\vec{CA} + \vec{AH}) \cdot \vec{AB}$

En développant : $\vec{BA} \cdot \vec{AC} + \vec{AH} \cdot \vec{AC} = \vec{CA} \cdot \vec{AB} + \vec{AH} \cdot \vec{AB}$

Or : $\vec{BA} \cdot \vec{AC} = -\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{CA} = \vec{CA} \cdot \vec{AB}$

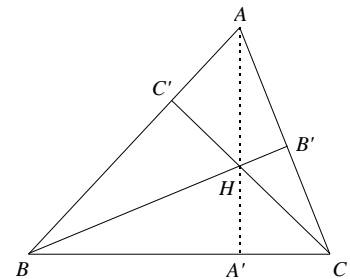
Il reste : $\vec{AH} \cdot \vec{AC} = \vec{AH} \cdot \vec{AB}$

En regroupant : $\vec{AH} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = 0$

C'est-à-dire : $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$.

Les droites (AH) et (BC) sont donc perpendiculaires, donc (AH) est bien la hauteur issue de A .

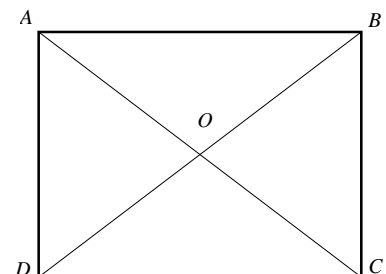
Donc les 3 hauteurs du triangle sont concourantes en A .



Exercice : $ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $AB = 4$ et $BC = 3$.

Calculer $\vec{AC} \cdot \vec{DB}$.

$$\vec{AC} \cdot \vec{DB} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot \vec{DB} = \vec{AB} \cdot \vec{DB} + \vec{BC} \cdot \vec{DB} = AB^2 - BC^2 = 7.$$



Règle pratique : pour calculer un produit scalaire, on peut décomposer un vecteur (ou les deux) suivants des directions orthogonales.

III) Identités remarquables

Théorème 3 :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Démonstration : évident. (On utilise la linéarité et la symétrie du produit scalaire)

Applications :

1) Identité du parallélogramme : $(\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} - \vec{v})^2 = 2(\vec{u}^2 + \vec{v}^2)$

(Si $ABCD$ est un parallélogramme, en posant $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AD}$, on obtient une relation entre les diagonales et les côtés du parallélogramme : $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$ ce qui est bien pratique)

2) Inégalité triangulaire : comme $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ ($\cos \theta \leq 1$), on a :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$$

D'où : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$

Et comme la fonction racine carrée est croissante, et tenant compte de la relation $\sqrt{A^2} = |A|$, on obtient :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

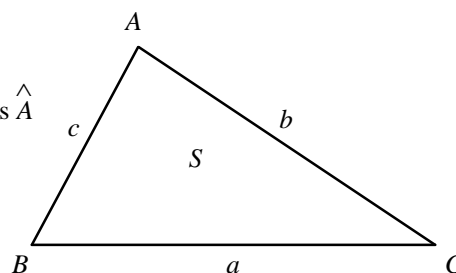
IV) Applications du produit scalaire en géométrie

1) Formule d'Al-Kashi (XIV^{ème}) (dite encore de "Pythagore généralisé")

Soit ABC un triangle quelconque. On notera (par abus) $\cos A$ au lieu de $\cos \hat{A}$

On a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



Démonstration :

$$a^2 = BC^2 = \vec{BC}^2 = (\vec{BA} + \vec{AC})^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Application : solution du problème de motivation :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \cos 70 \simeq 16,79 \text{ d'où } BC \simeq 4,10 \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}$$

2) Équation d'une droite perpendiculaire à une autre :

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , considérons donnée une droite (AB) avec $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Soit $C(x_C; y_C)$ un point distinct de A et B . Comment trouver une équation de la droite Δ perpendiculaire à (AB) et passant par C ?

Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan. On utilise la caractérisation suivante : $M \in \Delta \Leftrightarrow \vec{CM} \cdot \vec{AB} = 0$.

Exemple : trouver les coordonnées de l'orthocentre d'un triangle et les coordonnées du cercle du centre circonscrit à un triangle.

3) Équation d'un cercle

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , comment trouver une équation d'un cercle \mathcal{C} ?

Cas 1 : on connaît le centre $\Omega(x_0; y_0)$ et le rayon r du cercle \mathcal{C} .

Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan. On utilise la caractérisation suivante : $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = r$.

Or, $\Omega M^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ d'où une équation de \mathcal{C} :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Cas 2 : on connaît deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ du cercle \mathcal{C} qui sont diamétralement opposés.

Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan. On utilise la caractérisation suivante : $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

Exemple : trouver une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(0; 4)$ et $B(4; 0)$.

4) Formules de la médiane

Soit MAB un triangle et I le milieu de $[AB]$. On a alors :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$$

$$MA^2 - MB^2 = 2 \vec{MI} \cdot \vec{BA}$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$$

Ces formules ne sont pas à connaître pas cœur. Par contre, on doit savoir les retrouver en utilisant des carrés scalaires et le milieu I de $[AB]$. Pour des applications de ces formules, voir le document "lieux géométriques" où l'on détermine un certain nombre de lignes de niveau.

Preuve :

$$MA^2 + MB^2 = \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = 2MI^2 + 2 \vec{MI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB}) + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$$

$$MA^2 - MB^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 - (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = 2 \vec{MI} \cdot (\vec{IA} - \vec{IB}) = 2 \vec{MI} \cdot \vec{BA}$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB}) = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} - \vec{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$$

Exemple :

$MA = 5$; $MB = 3$ et $AB = 6$. Alors $MI = 2\sqrt{2}$.

Application : soit M un point situé à l'intérieur d'un rectangle $ABCD$. Démontrer que :

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$

Notons O le centre du rectangle. D'après la formule de la médiane appliquée au triangle MAC , on a :

$$MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

De même, dans le triangle MBD :

$$MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + \frac{1}{2}BD^2$$

Et comme $AC = BD$, il vient :

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$

5) Symétrie d'un point par rapport à une droite

Soient D une droite d'équation $ax + by + c = 0$, $A(\alpha ; \beta)$ un point du plan et A' le symétrique de A par rapport à D .

Exprimer les coordonnées de A' en fonction de a, b, c, α et β .

Notons $(\alpha' ; \beta')$ les coordonnées de A' .

Nous savons qu'un vecteur directeur \vec{u} de D est $\vec{u}(-b ; a)$.

Comme les vecteurs \vec{u} et $\vec{AA'}$ sont orthogonaux, on a :

$$-b(\alpha' - \alpha) + a(\beta' - \beta) = 0$$

C'est-à-dire :

$$-b\alpha' + a\beta' = -b\alpha + a\beta \quad (E_1)$$

Par ailleurs, le point I , milieu de $[AA']$ est sur D donc :

$$a\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2}\right) + b\left(\frac{\beta + \beta'}{2}\right) + c = 0$$

C'est-à-dire :

$$a\alpha' + b\beta' = -a\alpha - b\beta - 2c \quad (E_2)$$

On résout le système constitué des équations (E_1) et (E_2) (d'inconnues α' et β') en effectuant $a(E_1) + b(E_2)$:

$$(a^2 + b^2)\beta' = -2ab\alpha + (a^2 - b^2)\beta - 2bc$$

Comme a et b ne sont pas tous deux nuls, $a^2 + b^2$ n'est pas nul d'où :

$$\beta' = \frac{-2ab\alpha + (a^2 - b^2)\beta - 2bc}{a^2 + b^2}$$

De même, l'opération $b(E_1) - a(E_2)$ donne :

$$(-b^2 - a^2)\alpha' = (-b^2 + a^2)\alpha + 2ab\beta + 2ac$$

D'où :

$$\alpha' = \frac{(b^2 - a^2)\alpha - 2ab\beta - 2ac}{a^2 + b^2}$$

Trois cas particuliers :

- droite horizontale $y = k$ ($a = 0, b = 1, c = -k$), on trouve :

$$\alpha' = \alpha \text{ et } \beta' = -\beta + 2k$$

- droite verticale $x = \lambda$ ($a = 1, b = 0, c = -\lambda$), on trouve :

$$\alpha' = -\alpha + 2\lambda \text{ et } \beta' = \beta$$

- "première bissectrice" $y = x$ ($a = 1, b = -1, c = 0$), on trouve :

$$\alpha' = \beta \text{ et } \beta' = \alpha$$

