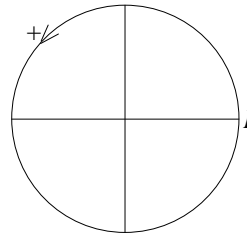


ANGLES ET ROTATIONS

Rappel : un cercle de rayon 1, orienté, sur lequel est fixé un point " origine I " est appelé trigonométrique.



À tout point M du cercle trigonométrique, on associe une famille de nombres réels appelés abscisses curvilignes de M :

Si x est l'une d'elles, toutes les autres sont de la forme $x + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Il existe une et une seule abscisse curviligne appartenant à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$. Sa valeur absolue est égale à la longueur du "petit" arc géométrique d'extrémités I et M .

1) Angles géométriques et angles orientés

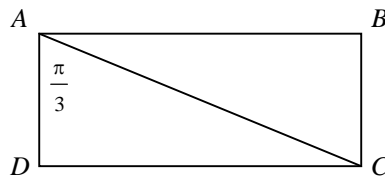
Un angle géométrique est toujours **positif**.

Un angle orienté peut être négatif ; cela dépend de l'orientation choisie.

Exemple : Si l'orientation choisie est le sens trigonométrique, on a :

Angles géométriques :

$$\widehat{DAC} = \widehat{CAD} = \frac{\pi}{3}$$



Angles orientés (angle entre 2 vecteurs)

$$(\vec{AC}, \vec{AD}) = -\frac{\pi}{3} \text{ et } (\vec{AD}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$$

(mesures principales)

Remarque : un angle a une infinité de mesures. Sur la figure ci-dessus, on aurait pu écrire :

$$(\vec{AD}, \vec{AC}) = \frac{7\pi}{3} \text{ et } (\vec{AC}, \vec{AD}) = \frac{5\pi}{3}$$

Toutes les mesures s'obtiennent en ajoutant $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). On note alors :

$$(\vec{AD}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3} (2\pi) \text{ et } (\vec{AC}, \vec{AD}) = -\frac{\pi}{3} (2\pi)$$

La seule mesure de l'angle appartenant à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ est appelée mesure principale.

En prenant la valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté, on obtient l'angle géométrique.

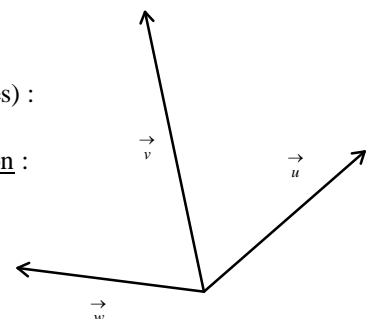
Relation de Chasles avec les angles

Pour tous vecteurs non nuls \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , on a la relation suivante (dite de Chasles) :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) \quad (2\pi)$$

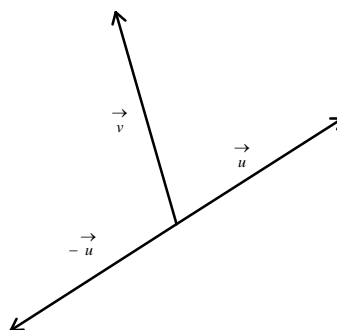
(Cette relation est admise à notre niveau)

Illustration :



Variations : on a les relations suivantes :

- $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) \quad (2\pi)$
- $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \quad (2\pi)$
- $(k\vec{u}, k\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \quad (2\pi)$ (pour tout $k \neq 0$)



En particulier ($k = -1$) : $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \quad (2\pi)$

Démonstrations de ces trois relations (à partir de la relation de Chasles)

- D'après la relations de Chasles, on a :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{u}) \quad (2\pi)$$

Or, $(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \quad (2\pi)$, d'où : $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) \quad (2\pi)$

- D'après la relations de Chasles, on a :

$$(-\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = (-\vec{u}, \vec{u}) \quad (2\pi)$$

Or, $(-\vec{u}, \vec{u}) = \pi \quad (2\pi)$, d'où : $(-\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u}) + \pi \quad (2\pi)$

Or, d'après ce qui précède : $-(\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{v}) \quad (2\pi)$

D'où : $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \quad (2\pi)$

Remarque : comme $\pi = -\pi \quad (2\pi)$, on a aussi : $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) - \pi \quad (2\pi)$

- En utilisant deux fois la relation de Chasles :

$$(k\vec{u}, k\vec{v}) = (k\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, k\vec{v}) \quad (2\pi)$$

Cas 1 : $k > 0$.

Dans ce cas, les vecteurs \vec{u} et $k\vec{u}$ sont de même sens, donc $(k\vec{u}, \vec{u}) = 0 \quad (2\pi)$

De même, $(\vec{v}, k\vec{v}) = 0 \quad (2\pi)$.

D'où : $(k\vec{u}, k\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \quad (2\pi)$

Cas 2 : $k < 0$.

Dans ce cas, les vecteurs \vec{u} et $k\vec{u}$ sont de sens opposés, donc $(k\vec{u}, \vec{u}) = \pi \quad (2\pi)$

De même, $(\vec{v}, k\vec{v}) = \pi \quad (2\pi)$.

Donc $(k\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{v}, k\vec{v}) = \pi + \pi = 0 \quad (2\pi)$

D'où : $(k\vec{u}, k\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \quad (2\pi)$

Application : ABC est un triangle de sens direct. Démontrer que la somme des mesures de ses angles orientés est égale à π .

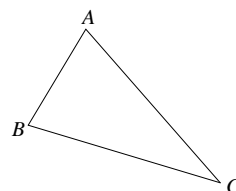
Notons $\theta = (\vec{AB}; \vec{AC}) + (\vec{BC}; \vec{BA}) + (\vec{CA}; \vec{CB})$

Comme $(\vec{AB}; \vec{AC}) = (\vec{BA}; \vec{CA})$, on peut écrire :

$$\theta = (\vec{BC}; \vec{BA}) + (\vec{BA}; \vec{CA}) + (\vec{CA}; \vec{CB}) \quad (2\pi)$$

Et d'après la relation de Chasles : $\theta = (\vec{BC}; \vec{CB}) \quad (2\pi)$

D'où : $\theta = \pi \quad (2\pi)$



Bases et repères orthonormés (ou orthonormaux) directs et indirects

Un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) (ou une base (\vec{i}, \vec{j})) est orthonormal(e) direct lorsque :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ et } (\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

Un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) (ou une base (\vec{i}, \vec{j})) est orthonormal(e) indirect lorsque :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ et } (\vec{i}, \vec{j}) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

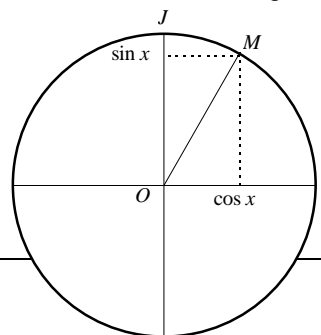
2) Cosinus et sinus d'un angle orienté de deux vecteurs

Rappel : cosinus et sinus sur le cercle trigonométrique :

Définition : Soit M un point du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radian de l'angle orienté

(\vec{OI}, \vec{OM}) . Alors :

- $\cos x$ est l'abscisse de M dans le repère (O, \vec{OI}, \vec{OJ})
- $\sin x$ est l'ordonnée de M dans ce même repère.



Cosinus et sinus de l'angle (\vec{u}, \vec{v}) lorsque \vec{u} et \vec{v} sont des vecteurs quelconques

Ils sont définis comme ceci : soit O un point du plan, et \mathcal{C} le cercle trigonométrique de centre O .

On ramène les vecteurs \vec{u} et \vec{v} à des vecteurs **unitaires** (c'est à dire de norme 1) en posant :

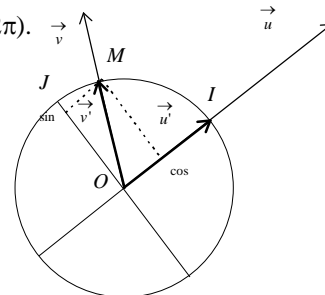
$$\vec{u}' = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \text{ et } \vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Soient I le point de \mathcal{C} tel que $\vec{OI} = \vec{u}'$, J le point de \mathcal{C} tel que $(\vec{OI}, \vec{OJ}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

Soit, enfin, le point M de \mathcal{C} tel que $\vec{OM} = \vec{v}'$.

On définit alors :

- $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ comme étant l'abscisse de M dans le repère (O, \vec{OI}, \vec{OJ})
- $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ comme étant l'ordonnée de M dans ce même repère.



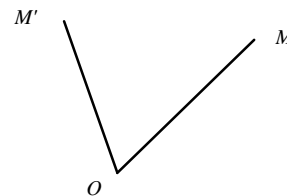
3) Rotations

Définition : Soit O un point du plan. La rotation r de centre O et d'angle α transforme un point M en un point image M' tel que :

$$OM' = OM \text{ et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \text{ (mod } 2\pi)$$

Remarques :

- L'image du centre O est O (on dit que le point O est invariant).
- Les rotations d'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sont appelées quarts de tour direct.
- Les rotations d'angle $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ sont appelées quarts de tour indirect.
- La rotation de centre O et d'angle $\alpha = \pi$ est la symétrie centrale par rapport à O .
- On note parfois $r_{(O; \alpha)}$ la rotation de centre O et d'angle α .



Exemple : $ABCD$ est un carré de sens direct de centre O . Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O une rotation de centre O et d'angle α .

1. Déterminer $r_A(A)$; $r_A(B)$; $r_A(D)$
2. Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = B$? Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = C$?

Propriétés de conservations

Les rotations conservent :

- les distances
- le milieu d'un segment
- les angles orientés
- l'alignement
- le parallélisme
- l'orthogonalité

Actions sur les figures

Une rotation transforme :

- une droite en une droite
- un cercle en un cercle de même rayon
- un triangle en un triangle de même nature
- un quadrilatère en un quadrilatère de même nature

Composition de deux rotations

Soient r_1 et r_2 deux rotations. La transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $M' = r_2(r_1(M))$ est appelée rotation composée de r_1 et r_2 . On la note $r_2 \circ r_1$.

Théorème 1 : Lorsque les deux rotations r_1 et r_2 ont le même centre O , $r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre O et d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$ où α_1 et α_2 désignent les angles respectifs des rotations r_1 et r_2 .

Théorème 2 : Deux rotations de même centre commutent. (faux lorsque les centres sont distincts)

Rotation réciproque

Soit r une rotation de centre O et d'angle α .

La rotation de centre O et d'angle $-\alpha$ est appelée rotation réciproque de r . On la note r^{-1} .

Propriété : $r \circ r^{-1} = r^{-1} \circ r = \text{Id}$