

DÉRIVATION

I) NOMBRE DÉRIVÉ

Définition 1

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I contenant a est dérivable en a s'il existe un réel A tel que :

$$\text{pour tout réel } h \text{ tel que } a + h \in I : f(a + h) = f(a) + Ah + h\varphi(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

Le nombre A s'appelle nombre dérivé de f en a ; on le note $f'(a)$.

Exemple :

La fonction f , définie sur \mathbb{R} , par $f(x) = x^2 + 3x - 4$ est-elle dérivable en a ?

Pour le savoir, calculons $f(a + h)$:

$$f(a + h) = (a + h)^2 + 3(a + h) - 4 = a^2 + 2ah + h^2 + 3a + 3h - 4 = a^2 + 3a - 4 + (2a + 3)h + h^2$$

$$f(a + h) = f(a) + Ah + h\varphi(h) \text{ avec } A = 2a + 3 \text{ et } \varphi(h) = h \text{ (et on a bien } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0).$$

Conclusion : la fonction f est dérivable pour tout réel a . Son nombre dérivé est $A = 2a + 3$.

Exercices : calculer (s'il existe) le nombre dérivé A de la fonction "carré", d'une fonction affine $f(x) = mx + p$ et d'une fonction constante $f(x) = k$.

Le théorème suivant est un critère pour voir si une fonction est dérivable en a (car ce n'est pas toujours facile de le vérifier avec la définition)

Théorème 1

Une fonction f est dérivable en a si et seulement si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Sa valeur A est alors le nombre dérivé de f en a .

Vocabulaire : la quantité $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ s'appelle l'**accroissement moyen** de f entre a et $a + h$.

(Ou encore le "taux de variation" ou "taux d'accroissement", selon les ouvrages)

Exemple : La fonction f définie par $f(x) = x^3 - 7$ est-elle dérivable en $a = 2$?

Pour le savoir, évaluons la limite de la quantité suivante :

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{(2 + h)^3 - 7 - 2^3 + 7}{h} = \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} = 12 + 6h + h^2$$

On simplifie d'abord l'expression avant d'étudier sa limite.

D'où :
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = 12$$

Donc f est dérivable en $a = 2$, son nombre dérivé en 2 est $f'(2) = 12$.

Exercice :

Montrer que la fonction racine carré ($f : x \mapsto \sqrt{x}$) est dérivable en tout point de $]0 ; \infty[$ mais pas en 0.

Démonstration du théorème

Si f est dérivable, l'accroissement moyen n'est autre, d'après la définition, que la quantité $A + \varphi(h)$.

Donc la limite de l'accroissement moyen (quand h tend vers 0) est A (puisque $\varphi(h)$ tend vers 0).

Réciproquement, si la limite de l'accroissement moyen existe et vaut A , alors il existe une fonction φ qui tend

vers 0 telle que $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A + \varphi(h)$, donc on a bien l'écriture $f(a+h) = f(a) + Ah + h\varphi(h)$.

II) INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU NOMBRE DÉRIVÉ

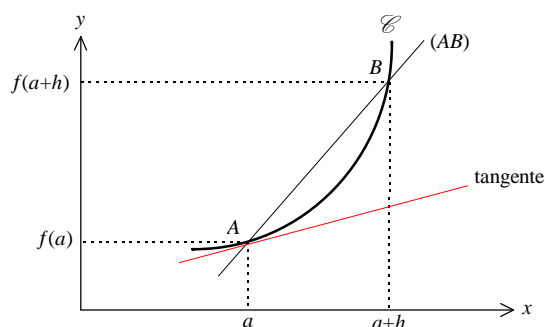
Soit \mathcal{C} la courbe représentative d'une fonction f dérivable en a .

On considère le point $A(a; f(a))$ et le point $B(a+h; f(a+h))$.

Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Lorsque le point B s'approche du point A (lorsque h tend vers 0), le coefficient directeur de (AB) tend vers le nombre dérivé $f'(a)$ et la droite (AB) devient tangente à \mathcal{C} (un seul point de contact).



Propriété

Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point A d'abscisse a .

Équation de la tangente :

On a $f'(a) = \frac{y - f(a)}{x - a}$ pour tout point $M(x; y)$ de la tangente à \mathcal{C} en A , ce qui nous en donne une équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

III) FONCTION DÉRIVÉE

Nous avons vu dans un exemple précédent, que la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3x - 4$ est dérivable pour tout réel a et que son nombre dérivé en a est $A = f'(a) = 2a + 3$. Il est donc naturel de définir une nouvelle fonction qui à x associe le nombre dérivé $f'(x)$. **Cette fonction s'appelle la dérivée de f et se note f' .**

La dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 3x - 4$ est donc $f' : x \mapsto 2x + 3$.

Définition 2

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I lorsqu'elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

Tableau des dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'	définie sur
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$ ($n \geq 1$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \geq 1$)	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^*
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0 ; +\infty [$

Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient

Dans le tableau ci-dessous, u et v sont deux fonctions définies sur un même intervalle I

Fonction	Fonction dérivée	Exemple
$u + v$	$u' + v'$	Si $f(x) = x + \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
uv	$u'v + uv'$	Si $f(x) = x\sqrt{x}$ alors $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
u^n	$nu'u^{n-1}$	Si $f(x) = (3x^2 - 2)^5$ alors $f'(x) = 5(6x)(3x^2 - 2)^4 = 30x(3x^2 - 2)^4$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ alors $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{2x+3}{4x-4}$ alors $f'(x) = \frac{2(4x-4) - 4(2x+3)}{(4x-4)^2} = \frac{-20}{(4x-4)^2}$

Dérivée des fonctions de la forme $f(x) = g(ax + b)$

On admettra le résultat suivant :

$$f'(x) = a g'(ax + b)$$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $[\frac{1}{3}; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x-1}$. Comment la dériver ?

On remarque que f peut s'écrire $f(x) = g(3x - 1)$ où $g(t) = \sqrt{t}$.

Or, pour tout $t > 0$, on a : $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, donc $f'(x) = a g'(ax + b) = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$ pour tout $x > \frac{1}{3}$.

Exercice : À l'aide des résultats ci-dessus, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = (x^2 + x + 1)^2$

2) $f(x) = (x - 1)^2(3 - x)^3$

3) $f(x) = (x - 1)^4(x + 1)^4$

4) $f(x) = x^3(1 + \sqrt{x})$

5) $f(x) = 4x^2\sqrt{x}$

6) $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$

7) $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)(x + \sqrt{x})$

8) $f(x) = \sqrt{2-x}$