EXERCICES SUR LES ANGLES ET LES ROTATIONS

Exercice 1

ABC est un triangle de sens direct rectangle en *A*. On construit à l'extérieur du triangle les carrés *ACDE* et *BCFG*. Démontrer que les droites (*BD*) et (*AF*) sont perpendiculaires, et que *BD* = *AF*.

Exercice 2

ABC est un triangle équilatéral de sens direct.

On construit sur [*AB*], [*BC*] et [*CA*] les points *P*, *Q* et *R* tels que *AP* = *BQ* = *CR*.

Démontrer que le triangle *PQR* est équilatéral.

Exercice 3

ABC est un triangle de sens direct. On construit *M* et *N* tels que *AMB* et *ANC* soit équilatéraux.

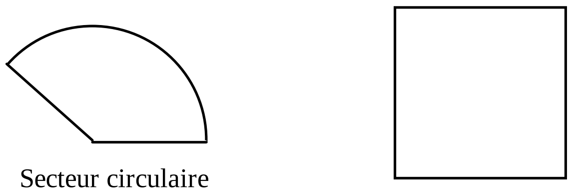
Démontrer que *MC* = *NB*.

Exercice 4

Soit *ABCD* un carré de centre *O* de sens direct. Soient *I* le symétrique de *A* par rapport à *B* et *J* le symétrique de *D* par rapport à *A*. Démontrer que *OIJ* est un triangle rectangle isocèle en *O*.

Exercice 5 : l'angle 2 radians

Démontrer que les deux domaines ci-dessous ont même aire et même périmètre :



Secteur circulaire de 2 radians

Carré

Exercice 6

OAB et *OCD* sont deux triangles rectangles isocèles de sens direct.

Montrer que *AC* = *BD* et que (*AC*) et (*BD*) sont perpendiculaires.

Exercice 7

ABCD et *AEFG* sont deux carrés de sens direct, de côtés inégaux.

On désigne par *M*, *N*, *P* et *Q* les milieux respectifs des segments [*BD*], [*DE*], [*EG*] et [*GB*].

Soit *r* la rotation de centre *A* et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que *MNPQ* est un parallélogramme.
3. Déterminer l'image du segment [*BE*] par la rotation *r*.
4. En déduire que *MNPQ* est un carré.

Exercice 8

"J'habite à la campagne, dans une zone en forme de triangle équilatéral, dont les sommets sont 3 villages. Ma maison se trouve à vol d'oiseau à 3 km, 4 km et 5 km des 3 villages. De combien chaque village est-il distant des deux autres ?"

Soit M un point intérieur à un triangle équilatéral ABC de sens direct.

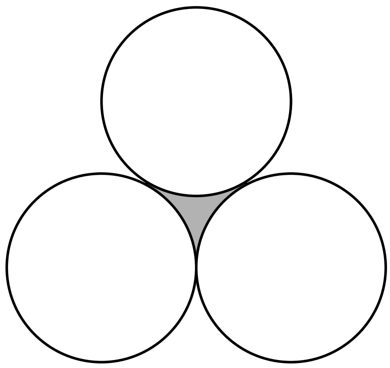
On considère la rotation r de centre A et d'angle $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

1. Construire $N = r(M)$.
2. À l'aide des données $MA = 5$, $MB = 4$ et $MC = 3$, déterminer les longueurs du triangle CMN. En déduire sa nature.
3. À l'aide des relations métriques dans le triangle ACN, en déduire la longueur des côtés du triangle ABC.

Exercice 9

Trois cercles de rayon $R = 1$ sont tangents deux à deux. Calculer l'aire grisée comprise entre les 3 cercles.

(Rappel : $S = \dfrac{1}{2}\alpha R^2$)



Exercice 10

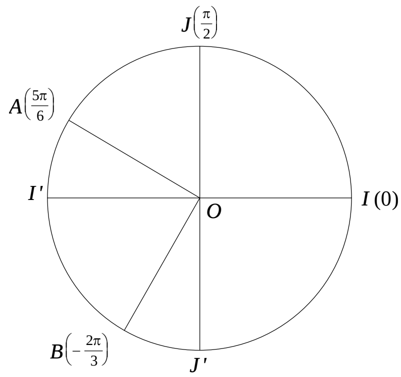
Sur un cercle trigonométrique C, on considère les points A et B tels que :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{5\pi}{6} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{2\pi}{3}$$

Déterminer la mesure principale des angles suivants :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ'}) ; (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OB}) ; (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) ; (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OB}) ;$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BO}) ; (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO}) ; (2\overrightarrow{OA}, -3\overrightarrow{OB}).$$



Exercice 11

ABC est un triangle isocèle en A.

I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

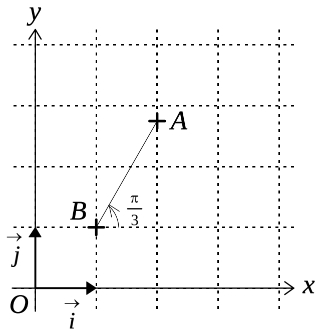
Démontrer que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{JOC}$ sont égaux.

Exercice 12

Dans un repère orthonormal de sens direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $B(1 ; 1)$ et le point A d'abscisse 2 tel que :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}.$$

Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.



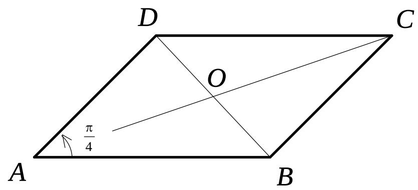
Exercice 13

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

1. Démontrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = 0$.
2. Quelle propriété du parallélogramme a-t-on démontré ?
3. On suppose que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4}$.

   Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

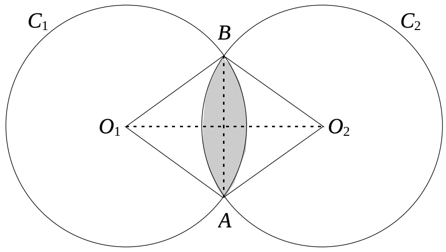
   $$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) ; (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DA}) ; (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) ; (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA})$$



Exercice 14

C_1 et C_2 sont deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2 et de même rayon $R = 2$ cm.

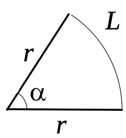
On suppose que ces deux cercles se coupent en deux points A et B avec $(\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1B}) = \frac{\pi}{3}$.



Note : la figure n'est pas à l'échelle et les angles ne sont pas représentés à leur vraie mesure

1. Quelle est la nature du quadrilatère O_1AO_2B ?
2. Calculer la distance O_1O_2 et la distance AB.
3. Calculer le périmètre et l'aire de la surface d'intersection des deux disques (zone grisée sur la figure)

Rappel : la longueur L d'un arc de cercle et l'aire A d'un secteur angulaire sont donnés ci-contre (l'angle α étant mesuré en radians)



$L = r\alpha$

$A = \frac{\alpha}{2} r^2$

Exercice 15

ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$. On sait que $(\overrightarrow{IA} ; \overrightarrow{IB}) = \frac{\pi}{3}$.

Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

$$(\overrightarrow{AI} ; \overrightarrow{IB}) ; (\overrightarrow{AI} ; \overrightarrow{IC}) ; (\overrightarrow{IA} ; \overrightarrow{CB})$$