

EXERCICES SUR LE BARYCENTRE

Exercice 1

$ABCD$ est un quadrilatère et G est le barycentre de $(A, 1)(B, 1)(C, 3)(D, 3)$.

Construire le point G . (Argumenter)

Exercice 2

ABC est un triangle.

1. G est le barycentre de $(A, 1)(B, 2)(C, 3)$. Construire le point G . (Argumenter)
2. G' est le barycentre de $(A, 1)(B, 3)(C, -3)$. Construire le point G' . (Argumenter)
3. Démontrer que (AG') est parallèle à (BC) .

Exercice 3

B est le milieu de $[AC]$. Démontrer que le barycentre de $(A, 1)(C, 3)$ est confondu avec celui de $(B, 2)(C, 2)$.

Exercice 4

Dans le triangle ABC , E est le milieu de $[AB]$ et G est le barycentre de $(A, -2)(B, -2)(C, 15)$.

Démontrer que G , C et E sont alignés.

Exercice 5

On considère un triangle ABC et l'on désigne par G le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 4)$ et $(C, -3)$.

1. Construire le barycentre I de $(B, 4)$ et $(C, -3)$.
2. Montrer que $\vec{GA} + \vec{GI} = \vec{0}$. En déduire la position de G sur (AI) .

Exercice 6

ABC est un triangle. On note G le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

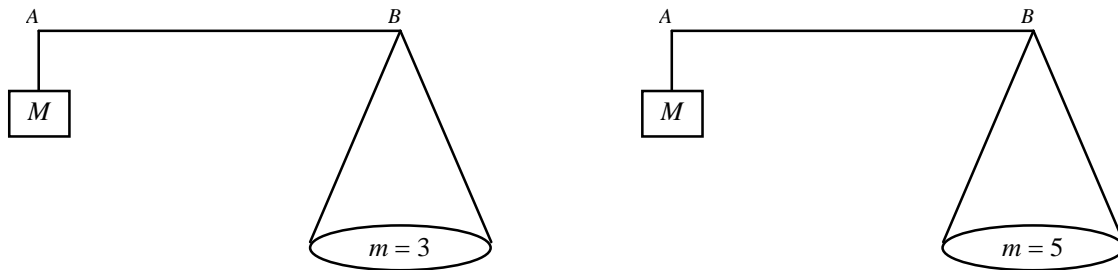
Le but de l'exercice est de déterminer la position précise du point G .

1. Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer que $\vec{GB} + \vec{GC} = 2 \vec{GI}$.
2. En déduire que G est le barycentre de A et I munis de coefficients que l'on précisera.
3. Conclure.

Exercice 7

Une balance est constituée d'une masse M et d'un plateau fixé aux extrémités d'une tige. Pour peser une masse m , le vendeur place, à une position précise, un crochet sur la tige. Cette balance a l'avantage, pour le commerçant, de ne pas manipuler plusieurs masses.

1. Pour chacun des cas suivants, où faut-il fixer le crochet G sur le segment $[AB]$ pour réaliser l'équilibre ?
($M = 2\text{kg}$)



(On pourra reproduire ces schémas à l'échelle de son choix)

2. Le point G est tel que $\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AB}$. Quelle est la masse m pesée ? (Donnée : $M = 2\text{kg}$)

Exercice 8

$ABCD$ est un quadrilatère. On note G son isobarycentre. Le but de cet exercice est de préciser le position de G .

1. On note I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$.

Montrer que G est le barycentre de I et J munis de coefficients que l'on précisera.

2. Conclure et faire une figure.

Exercice 9

1. Placer dans un repère les points $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$ et $C(-2, 5)$.

Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 3)$, $(B, 2)$ et $(C, -4)$.

2. Quelles sont les coordonnées de G ? Placer G .

3. La droite (BG) passe-t-elle par l'origine du repère ? (Justifier)

Exercice 10

Étant donné un triangle ABC et k un réel non nul, on définit les points D et E par les relations :

$$\vec{AD} = k \vec{AB} \quad \text{et} \quad \vec{CE} = k \vec{CA}$$

1. Faire une figure illustrant ces données lorsque $k = \frac{1}{3}$, puis lorsque $k = -1$.

2. Démontrer que D est le barycentre de $(A, 1 - k)$ et (B, k) .

3. Démontrer que E est le barycentre de $(C, 1 - k)$ et (A, k) .

4. En déduire que pour tout point M du plan, on a :

$$\vec{MD} + \vec{ME} = \vec{MA} + \vec{MC} + k \vec{CB} = 2(\vec{MB}' + k \vec{B}'C') \quad \text{où } B' \text{ et } C' \text{ sont les milieux respectifs de } [AC] \text{ et } [AB].$$

5. Soit I le milieu de $[DE]$, déduire de la question précédente que I , B' et C' sont alignés.

Exercice 11

ABC est un triangle. Soit G le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 3)$ et $(C, -3)$

Démontrer que les droites (AG) et (BC) sont parallèles.

Exercice 12

ABC est un triangle. On considère le barycentre A' de $(B, 2)$ et $(C, -3)$, le barycentre B' de $(A, 5)$ et $(C, -3)$ ainsi que le barycentre C' de $(A, 5)$ et $(B, 2)$.

Démontrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes.

Indication : on pourra considérer le barycentre G de $(A, 5)$, $(B, 2)$ et $(C, -3)$.

Exercice 13

ABC est un triangle de centre de gravité G . On note I, J, M, N, R et S les points définis par :

$$\vec{AI} = \frac{1}{3} \vec{AB} ; \vec{AJ} = \frac{2}{3} \vec{AB} ; \vec{AM} = \frac{1}{3} \vec{AC} ; \vec{AN} = \frac{2}{3} \vec{AC} ; \vec{BR} = \frac{1}{3} \vec{BC} ; \vec{BS} = \frac{2}{3} \vec{BC}$$

Démontrer que les droites (IS) , (MR) et (NJ) concourent en G .

Exercice 14

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3 cm.

1. Placer, en justifiant, le barycentre Z de $(A, 1)$, $(B, 3)$ et $(C, -3)$.
2. Montrer que les droites (AZ) et (BC) sont parallèles.

Exercice 15

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC = 8$ cm et $BA = 5$ cm. Soit I le milieu de $[BC]$.

1. Placer le point F tel que $\vec{BF} = -\vec{BA}$ et montrer que F est le barycentre des points A et B pondérés par des réels que l'on déterminera.
2. P étant un point du plan, réduire chacune des sommes suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \vec{PB} + \frac{1}{2} \vec{PC} \\ & - \vec{PA} + 2 \vec{PB} \\ & 2 \vec{PB} - 2 \vec{PA} \end{aligned}$$

3. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\left\| \frac{1}{2} \vec{MB} + \frac{1}{2} \vec{MC} \right\| = \left\| -\vec{MA} + 2 \vec{MB} \right\|$$

4. Déterminer et représenter l'ensemble des points N du plan vérifiant :

$$\left\| \vec{NB} + \vec{NC} \right\| = \left\| 2 \vec{NB} - 2 \vec{NA} \right\|$$

Exercice 16

Soit ABC le triangle donné sur la feuille ci-jointe.

1. Placer, en justifiant, le barycentre U de $(A, 4)$ et $(C, 1)$, puis placer le barycentre E de $(A, 4)$ et $(B, 1)$.
2. Soit G le barycentre de $(A, 4)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$. Montrer que G est barycentre de $(E, 5)$ et $(C, 1)$.
3. Démontrer que les droites (EC) , (AY) et (BU) sont concourantes.

Exercice 17

Dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , placer les points $A(2, 1)$, $B(-1, 5)$, $C(5, 7)$ et $G\left(1, \frac{5}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre I des points B et C .
2. Déterminer les coordonnées du centre de gravité H du triangle ABC .
3. Existe-t-il un réel k tel que G soit barycentre de $(A, 1)$ et (B, k) ? Justifier.

Exercice 18

Soit ABC un triangle et G un point vérifiant : $\vec{AB} - 4\vec{GA} - 2\vec{GB} - 3\vec{GC} = \vec{0}$.

Le point G est-il le barycentre des points pondérés $(A, 5)$, $(B, 1)$ et $(C, 3)$? (Justifier)

Exercice 19

Soient A et B deux points distincts et $G = \text{bar}(A, \alpha), (B, \beta)$ avec $\alpha + \beta \neq 0$.

Démontrer l'équivalence :

$$G \in [AB] \Leftrightarrow \alpha \text{ et } \beta \text{ sont de mêmes signes.}$$

Exercice 20

Soit $ABCD$ un carré et K le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, -1)$, $(C, 2)$ et $(D, 1)$.

On note I le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, -1)$ et J celui de $(C, 2)$ et $(D, 1)$.

1. Placer I et J en justifiant.
2. Réduire l'écriture des vecteurs suivants : $2\vec{KA} - \vec{KB}$ et $2\vec{KC} + \vec{KD}$.
En déduire que K est le barycentre de $(I, 1)$ et $(J, 3)$.
3. Placer K en justifiant.

Exercice 21

On considère un segment $[AB]$ de médiatrice d .

Soient C et D points de d et G l'isobarycentre de A, B, C et D .

Démontrer que $G \in d$.

Exercice 22

$ABCD$ est un quadrilatère. G est le centre de gravité du triangle ABC .

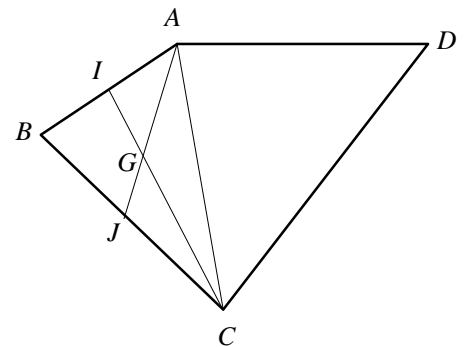
I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.

L est le barycentre de $(A, 1)$ et $(D, 3)$ et K le barycentre de $(C, 1)$ et $(D, 3)$.

Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (IK) , (JL) et (DG) sont concourantes.

Pour cela, on utilisera le barycentre H de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ et $(D, 3)$.

1. Placer, en justifiant, les points L et K .
2. Démontrer que H est le barycentre de G et D munis de coefficients que l'on précisera.
3. Démontrer que H est le barycentre de J et L munis de coefficients que l'on précisera.
4. Démontrer que H est le barycentre de I et K munis de coefficients que l'on précisera.
5. Conclure.



Exercice 23

$ABCDE$ est une pyramide à base carrée $BCDE$.

Soit G l'isobarycentre de A, B, C, D et E

On note O le centre du carré $BCDE$ (c'est-à-dire l'intersection des diagonales (CE) et (BD))

1. Démontrer que O est l'isobarycentre de $BCDE$.
2. Démontrer que G est le barycentre de $(O, 4)$ et $(A, 1)$.
3. Soit G_1 le centre de gravité du triangle ABE et I le milieu de $[CD]$. Démontrer que $G \in (G_1I)$.

(Pour cet exercice, une figure est recommandée)

Exercice 24

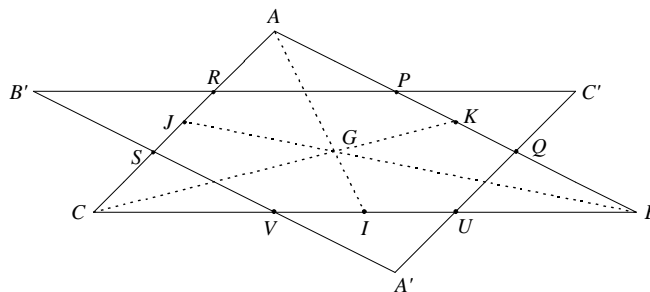
ABC est un triangle de centre de gravité G .

On note I, J et K les milieux respectifs de $[BC], [AC]$ et $[AB]$.

On définit les points P, Q, R, S, U et V par :

$$\vec{AP} = \frac{1}{3} \vec{AB}, \vec{AQ} = \frac{2}{3} \vec{AB}, \vec{AR} = \frac{1}{3} \vec{AC}, \vec{AS} = \frac{2}{3} \vec{AC}, \vec{BU} = \frac{1}{3} \vec{BC}, \vec{BV} = \frac{2}{3} \vec{BC}$$

On note $A' = (QU) \cap (SV), B' = (SV) \cap (RP)$ et $C' = (RP) \cap (QU)$



1. Démontrer que $AQA'S$ est un parallélogramme.
2. En déduire que $\vec{AA'} = 2 \vec{AG}$, puis que G est le milieu de $[AA']$.
3. On démontre, de même, que G est le milieu de $[BB']$ et de $[CC']$. Démontrer que G est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

Exercice 25

$ABCD$ est un tétraèdre et G est le barycentre de $(A, 4), (B, 1), (C, 1)$ et $(D, 1)$.

On note H le centre de gravité du triangle BCD (c'est-à-dire H est l'isobarycentre de B, C et D)

1. Démontrer que G est le barycentre de $(H, 3)$ et $(A, 4)$.
2. Situer le point G sur la droite (AH) .

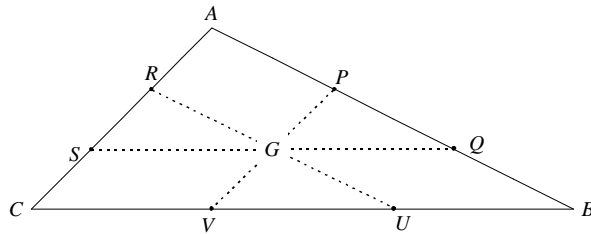
(Pour cet exercice, une figure est recommandée)

Exercice 26

ABC est un triangle de centre de gravité G .

On définit les points P, Q, R, S, U et V par :

$$\vec{AP} = \frac{1}{3} \vec{AB}, \vec{AQ} = \frac{2}{3} \vec{AB}, \vec{AR} = \frac{1}{3} \vec{AC}, \vec{AS} = \frac{2}{3} \vec{AC}, \vec{BU} = \frac{1}{3} \vec{BC}, \vec{BV} = \frac{2}{3} \vec{BC}$$



1. Démontrer que P est le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$ et que V est le barycentre $(C, 2)$ et $(B, 1)$.
2. En déduire que G est le milieu de $[PV]$.
3. On démontre, de même, que G est le milieu de $[RU]$ et de $[SQ]$ (inutile de refaire les calculs). Démontrer que $RPUV$ est un parallélogramme.

Exercice 27

$ABCD$ est un carré.

1. Quel est l'ensemble E des points M du plan tels que $\| 2 \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} \| = AB$?
2. Représenter cet ensemble E .

Exercice 28

ABC est un triangle. On définit les points I, J et K par :

$$\vec{BI} = k \vec{BC} \quad \vec{CJ} = k \vec{CA} \quad \vec{AK} = k \vec{AB} \quad (k \in \mathbb{R})$$

On note G l'isobarycentre de A, B et C .

1. Faire une figure dans la cas $k = \frac{1}{3}$.
2. Démontrer que G est l'isobarycentre de I, J et K .

Exercice 29

ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm.

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que : $\| \vec{MA} + \vec{MB} + 2 \vec{MC} \| = \| \vec{MB} + 3 \vec{MC} \|$

Exercice 30

$[AB]$ est un segment de longueur 6 cm.

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que : $MA = 2MB$.