

Exercice 1 Parité

Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}^*$$

$$h(x) = x + \frac{1}{x^2} \text{ sur } \mathbb{R}^*$$

$$g(x) = x^2 + \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}^*$$

$$k(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \text{ sur } \mathbb{R}^*$$

Exercice 2 Composée

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1$ sur \mathbb{R} .

Donner une formule explicite de la fonction $f \circ g$ lorsque :

$$g(x) = \sqrt{1-x} \text{ sur }]-\infty ; 1]$$

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}^*$$

Exercice 3 Comparaison de deux fonctions

Le but de cet exercice est de comparer les deux fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \sqrt{1+x} \text{ et } g(x) = 1 + \frac{x}{2} \text{ sur l'intervalle } [-1 ; +\infty[.$$

1. Montrer que $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-1 ; +\infty[$.
2. Calculer $(f(x))^2$ et $(g(x))^2$.
3. Démontrer que $(f(x))^2 \leq (g(x))^2$ pour tout $x \in [-1 ; +\infty[$.
4. En déduire une comparaison de f et g sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$.
5. Tracer sur un même repère les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$.

Exercice 4 Comparaison de deux fonctions (bis)

Le but de cet exercice est de comparer les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4} \text{ et } g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1. Calculer $f(x) - g(x)$. (On réduira au même dénominateur).
2. En déduire l'intervalle sur lequel on a $f \geq g$.

Exercice 5 Sens de variation

On considère la fonction f définie par $f(x) = x(1-x)$ sur \mathbb{R} .

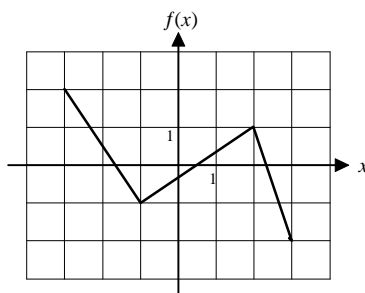
1. Démontrer que $f(x) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que la fonction f admet un maximum en $x = \frac{1}{2}$.
3. Démontrer que $f(x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.
4. En déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty ; \frac{1}{2}[$ et décroissante sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$.

Exercice 6 Sens de variation d'un fonction composée

Donner une décomposer de la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^2 + 2$ qui permette d'en déduire son sens de variation sur l'intervalle $I =]-\infty ; 3]$.

Exercice 7 Fonctions associées

On considère une fonction f définie sur $[-3 ; 3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



Préciser l'ensemble de définition et représenter chacune des fonctions définies ci-dessous :

$$f_1(x) = -f(x)$$

$$f_3(x) = f(x) + 1$$

$$f_2(x) = |f(x)|$$

$$f_4(x) = f(x+1).$$

Exercice 8 Synthèse

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $x \mapsto x + \frac{1}{x}$. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $x \mapsto x - \frac{1}{x}$.

- 1) Montrer que f est croissante sur $[1 ; +\infty[$ et décroissante sur $]0 ; 1]$. Qu'en est-il de g ?
- 2) Tracer les courbes représentant f et g dans un même repère.
- 3) Préciser si f est majorée, minorée, bornée ou non sur les intervalles suivants :

$$\left[\frac{1}{2} ; 3\right] ; [1 ; +\infty[\text{ et }]0 ; 1]$$

[On utilisera qu'une fonction monotone sur un intervalle $[a ; b]$ est encadrée par $f(a)$ et $f(b)$]

Exercice 9

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$$

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que f est une fonction positive sur \mathbb{R} .
3. Étudier la parité de la fonction f .
4. Tracer soigneusement la représentation graphique C_f de la fonction f . (On se limitera à l'intervalle $[-3 ; 3]$)
5. Donner par lecture graphique la valeur du maximum de la fonction f sur :
 - a) l'intervalle $[-1 ; 1]$
 - b) l'intervalle $[-2 ; 1]$
6. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 1$.

Exercice 10

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = x(x - 2)$

1. Étudier la parité de la fonction f .
2. Démontrer que $f(x) = (x - 1)^2 - 1$.
3. Démontrer que la fonction f est minorée par -1 .
4. Tracer soigneusement la représentation graphique C_f de la fonction f . (On se limitera à l'intervalle $[-1 ; 3]$)

Exercice 11

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Étudier la parité de la fonction f .
3. Tracer soigneusement la représentation graphique C_f de la fonction f .
4. Démontrer que la fonction f admet un maximum $M = 2$. (On pourra déterminer le signe de $[f(x)]^2 - 4$)

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 3]$ par $f(x) = -x^2 + 3x - 2$.

1. Démontrer que $f(x) = (1 - x)(x - 2)$.
2. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 3]$.
3. Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 13

Tout le monde connaît bien la propriété suivante :

Soient A et B deux réels. Si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$.

1. Considérons les fonctions f et g définies sur $I = [-1 ; 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- a) Représenter graphiquement les fonctions f et g .
 - b) Que vaut le produit fg sur I ? La propriété énoncée ci-dessus pour des réels est-elle vraie pour des fonctions ?
2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et k un nombre réel non nul. On suppose que : $kf = 0$ sur I .
Que dire de la fonction f (sur I) ?

Exercice 14

Le but du problème est de comparer les deux nombres suivants :

$$A = \frac{1,0000002}{1,0000004} \quad \text{et} \quad B = \frac{0,9999996}{0,9999998}$$

1. Soient f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1 + 2x}{1 + 4x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1 - 4x}{1 - 2x}$$

- a) Quels sont les ensembles de définition D_f et D_g des fonctions f et g ?
- b) Que vaut $f(10^{-7})$? Que vaut $g(10^{-7})$?
2. Pour comparer les nombres A et B , on va comparer les fonctions f et g en étudiant la différence $f(x) - g(x)$.
- a) Démontrer que : $f(x) - g(x) = \frac{12x^2}{(1+4x)(1-2x)}$.
- b) Résoudre l'inéquation : $f(x) - g(x) > 0$.
- c) En déduire le signe de $f(10^{-7}) - g(10^{-7})$.
- d) Conclure.

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

- Étudier la parité de la fonction f .
- Démontrer que $f(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Tracer la représentation graphique C_f de la fonction f .

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^4$

- Démontrer que, quels que soient les réels X et Y , on a : $X^4 - Y^4 = (X - Y)(X + Y)(X^2 + Y^2)$.
- Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- Étudier la parité de f . En déduire le sens de variations de f sur $]-\infty ; 0]$.

Exercice 17

Le but du problème est de comparer les deux nombres suivants :

$$A = 1,0000002 \text{ et } B = \sqrt{1,0000004}$$

- Soient f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \sqrt{1+x} \text{ et } g(x) = 1 + \frac{x}{2}$$

- a) Quels sont les ensembles de définition D_f et D_g des fonctions f et g ?
- b) Que vaut $f(4 \times 10^{-7})$? Que vaut $g(4 \times 10^{-7})$?
2. Pour comparer les nombres A et B , on va comparer les fonctions f et g .
- a) Montrer que $f(x) \geq 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in [-1 ; +\infty[$.
- b) Calculer $(f(x))^2$ et $(g(x))^2$.
- c) Démontrer que $(f(x))^2 < (g(x))^2$ pour tout $x \in [-1 ; +\infty[\setminus \{0\}$.
- d) En déduire que $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in [-1 ; +\infty[\setminus \{0\}$.
- e) Conclure.

Exercice 18

Soient a et b dans \mathbb{R}^+

1. Développer $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

2. Démontrer que : $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

Exercice 19

Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x^2 - 1$ et $g(x) = 4x^3 - 3x$.

Démontrer que : $f \circ g = g \circ f$.