

Vrai/Faux

Parmi les 5 affirmations suivantes, dites si elles sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, les démontrer, si elles sont fausses, donner un contre-exemple.

- A1. Si une fonction polynôme est de degré 3, alors son carré est de degré 9.
- A2. Une fonction polynôme admet toujours une racine réelle.
- A3. La fonction polynôme P définie par $P(x) = x^5 + x^4 + 7x + 1$ n'a pas de racines positives.
- A4. Deux fonctions polynômes qui ont les mêmes racines sont égales.
- A5. Si α est une racine de deux fonctions polynômes R et S , alors $R(x) - S(x)$ est factorisable par $x - \alpha$.

Exercice 1

Démontrer que la fonction polynôme P définie par $P(x) = x^3 + x - 1$ possède une racine réelle $\alpha \in [0 ; 1]$.
(Il n'est pas demandé de la calculer)

Exercice 2

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2 + x - 1$. On note C_f et C_g leurs représentations graphiques respectives.

Calculer coordonnées des points d'intersections de C_f et C_g .

Exercice 3

On considère la fonction P définie par $P(x) = (x^2 + 1)^2 - (4x + 2)^2$.

- 1. Montrer que P est une fonction polynôme dont on précisera le degré.
- 2. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 4

On considère la fonction polynôme P définie $P(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + k$ où k est un nombre réel.

- 1. Déterminer la valeur du réel k pour $x = 4$ soit une racine de P .
- 2. Pour la valeur de k obtenue à la question 1), résoudre l'inéquation $P(x) < 0$.

Exercice 5

Résoudre l'inéquation $\frac{-2x^2 + 3x - 10}{-x^3 + 7x^2 - 14x + 8} \geq 0$.

(On pourra, s'il y a lieu, factoriser le numérateur et le dénominateur puis faire un tableau de signes)

Exercice 6

On considère la fonction polynôme P définie par : $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

On note α , β et γ ses racines (elles existent !).

- 1. Écrire en fonction de α , β et γ la forme (totalement) factorisée de $P(x)$.
- 2. Montrer que $\alpha + \beta + \gamma = 5$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 3$ et $\alpha\beta\gamma = -1$.
- 3. Sachant que $\alpha = 2 - \sqrt{5}$ et $\beta = 1$, calculer (simplement) la troisième racine γ .

Exercice 7

Le but de cet exercice est de montrer qu'un entier N est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

À l'entier N qui s'écrit $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ dans le système décimal, on associe le polynôme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, ainsi $N = P(10)$

Un exemple :

Au nombre $N = 9873$, on associe la fonction polynôme $P(x) = 9x^3 + 8x^2 + 7x + 3$, ainsi $N = P(10)$.

1. Soit S la somme des chiffres de N . Montrer que $S = P(1)$.
2. On pose $P'(x) = P(x) - S$. Montrer que 1 est une racine de $P'(x)$.
3. En déduire que $P(x) = (x - 1)Q(x) + S$ où Q est une fonction polynôme de degré $n - 1$.
4. Montrer que $N = 9Q(10) + S$. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

Exercice 8

On considère l'expression $f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^3 + \left(x - \sqrt{1+x^2}\right)^3$

1. Démontrer que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
2. Démontrer que f est une fonction polynôme dont on précisera le degré.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 9

On considère la fonction polynôme P définie par $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6$.

1. Quel est le degré de P ?
2. Montrer que $x = -1$ est une racine de P .
3. Déterminer une fonction polynôme Q du troisième degré telle que $P(x) = (x + 1)Q(x)$.
4. Déterminer les racines de Q . [On pourra s'inspirer des questions précédentes.]
5. Résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Exercice 10

Résoudre $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ et $x^4 - x^2 - 12 = 0$

Exercice 11

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = 1 - x^2$ et $g(x) = x^2 - 4x + 2$ pour tout x réel.

On note C_f et C_g leurs courbes représentatives respectives dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Dresser les tableaux de variations de f et g .
2. Résoudre l'inéquation $g(x) \leq 0$ et interpréter graphiquement.
3. Tracer C_f et C_g en précisant les coordonnées des points d'intersection éventuels.

Exercice 12

Factoriser (sur \mathbb{R}) :

$$P(x) = x^4 - 1$$

Exercice 13

On donne la fonction rationnelle F définie par : $F(x) = \frac{-2x^3 + 11x^2 - 7x - 20}{x^2 - 2x - 3}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de F ?
2. Factoriser le numérateur et le dénominateur de F , puis simplifier l'expression de $F(x)$.
3. Résoudre l'inéquation $F(x) \geq 0$.

Exercice 14

Résoudre les équations :

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0. \text{ (On pourra remarquer que } x^3 + x^2 = x^2(x + 1)\text{)}$$

$$3x^3 + x^2 + 3x + 1 = 0. \text{ (On pourra remarquer que } 3x^3 + x^2 = x^2(3x + 1)\text{)}$$

Exercice 15

Déterminer une fonction polynôme P de degré 3 admettant 1, -3 et -4 pour racines et telle que $P(2) = 90$.

Exercice 16

On considère la fonction polynôme définie par :

$$Q(x) = 2x^3 - 7x + 2.$$

1. Vérifier que -2 est une racine de Q .
2. Factoriser Q et résoudre l'équation $Q(x) = 0$.

Exercice 17

On donne la fonction rationnelle F définie par : $F(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{-2x^2 - 3x + 5}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de F ?
2. Factoriser le numérateur et le dénominateur de F , puis simplifier l'expression de $F(x)$.
3. Résoudre l'inéquation $F(x) \leq 0$.

Exercice 18

On considère la fonction polynôme P définie par :

$$P(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 20$$

1. Vérifier que $\lambda = -2$ est une racine de P .
2. En déduire une factorisation maximale de P .
3. Résoudre l'inéquation : $3x(4 - x) \leq 2(x^3 - 10)$

Exercice 19

On considère la fonction polynôme P définie par :

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18.$$

1. Calculer $P(2)$. En déduire que $x_1 = 2$ est une racine de P .
2. Factoriser P .
3. Résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Exercice 20

Résoudre l'équation suivante : $x^2 - (J + M)x + JM = 0$

(Par exemple, si la date de naissance est le 4 Mars ($J = 4$ et $M = 3$), il faut résoudre l'équation $x^2 - 7x + 12 = 0$)

Exercice 21

Résoudre l'inéquation suivante :

$$x^4 - \left(1 + (M + 1)^2\right) x^2 + (M + 1)^2 \geq 0$$

(Avec l'exemple ci-dessus ($M = 3$), l'inéquation devient $x^4 - 17x^2 + 16 \geq 0$)

Indication : on pourra poser $X = x^2$, puis factoriser et enfin faire un tableau de signes...

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^3 + 3Mx^2 - 3(M^2 - 1)x + J$

(Avec toujours le même exemple ($J = 4$ et $M = 3$), la fonction f s'écrit : $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 4$)

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f . (On ne précisera pas les valeurs des éventuels extremums...)

Exercice 23

Le but de l'exercice est d'établir l'égalité suivante : $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$

1. On pose $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$. Calculer $\alpha^3 + \beta^3$ et $\alpha\beta$.

2. Démontrer que, pour tous réels A et B , on a :

$$(A^3 + B^3) = (A + B)(A^2 - AB + B^2) \quad \text{puis que} \quad (A^3 + B^3) = (A + B)((A + B)^2 - 3AB)$$

3. En déduire, que le réel $\alpha + \beta$ est solution de l'équation $x^3 + 3x - 4 = 0$.

4. Résoudre l'équation $x^3 + 3x - 4 = 0$ puis conclure.

Exercice 24

1. Factoriser, sur \mathbb{R} , l'expression : $x^3 - 1$.

2. Déterminer les réels A , B et C tels que : $\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$.

Exercice 25

Soit $A(n) = \frac{1}{n(n+1)}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que : $A(n) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

2. Exprimer, en fonction de n , la somme suivante : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

Exercice 26

Résoudre l'équation :

$$x + x^3 + x^5 + x^7 = 0$$

(Indication : peut-il y avoir une solution strictement positive ? Et une solution strictement négative ?)