EXERCICES DE TRIGONOMÉTRIE

Exercice 1

Résoudre, sur ℝ, les équations suivantes :

$$\sin^2 x = \frac{3}{4} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} \qquad \sin(2x) = \cos x$$

Exercice 2

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$A(x) = \cos(x+\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin^2(-x)$$

$$B(x) = \tan(x+\pi) - \tan x \quad \left(\text{pour } x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\right)$$

$$C(x) = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi - x).\sin(-x)$$

$$D(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{4} - \sin^2 x$$

Généralisation : $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

Exercice 3

En utilisant les formules d'addition, calculer la valeur exacte de $\sin\frac{7\pi}{12}$ et $\cos\frac{7\pi}{12}$.

(On pourra utiliser l'égalité $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$)

Exercice 4

Démontrer que pour tout réel x : $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$

Exercice 5

Démontrer que, pour tout réel x différent de $k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) :

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$$

Exercice 6

Démontrer que la représentation graphique de la fonction f définie, sur ℝ, par :

$$f(x) = \cos(2x) + \sin x - 1$$

est située entre les droites d'équation $y = -3$ et $y = 1$.

Exercice 7

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$$2\sin^3 x - 17\sin^2 x + 7\sin x + 8 = 0$$

Exercice 8

1. θ est un angle (situé dans $]-\pi\,;\,\pi]$) dont on sait que $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$. Que vaut θ (en radians) ?
2. θ est un angle situé dans $[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi]$ tel que $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$. Calculer $\cos\theta$ et $\tan\theta$.
3. θ est un angle situé dans $]-\pi\,;\,0]$ tel que $\cos\theta = \dfrac{2}{3}$. Calculer $\sin\theta$ et $\tan\theta$.
4. θ est un angle situé dans $]-\pi\,;\,0]$ tel que $\tan\theta = 2$. Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 9

Résoudre, dans $]-\pi\,;\,\pi[$, les équations :

$$2\cos^3 x - 7\cos^2 x + 2\cos x + 3 = 0$$

$$2\sin^3 x + \cos^2 x - 5\sin x - 3 = 0$$

Exercice 10

Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante : $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

On rappelle que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \in D$ où $D = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}\}$

1. Démontrer que pour tout $x \in D$: $\quad \tan(\pi + x) = \tan x$

   En déduire la valeur exacte de $\tan\dfrac{9\pi}{8}$.

2. Démontrer que pour tout $x \in D$: $\quad 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

   En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ puis de $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

3. Calculer la valeur exacte de $\cos\dfrac{5\pi}{8}$.

Exercice 11

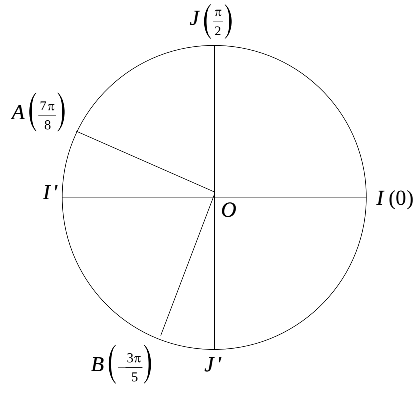
Sur un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, on considère les points A et B tels que :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{7\pi}{8} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{3\pi}{5}$$

Déterminer la mesure principale des angles suivants :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ})\ ;\ (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OB})\ ;\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$$

(On pourra utiliser la relation de Chasles)



Exercice 12

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A et B dont les **coordonnées polaires** sont :

$$A(2\,;0) \quad B\left(2\,;\frac{\pi}{6}\right)$$

On considère également le point C dont les **coordonnées cartésiennes** sont : $C(-\sqrt{3}\,;-1)$

1. Préciser, sans justification les coordonnées cartésiennes de A.
2. Calculer les coordonnées cartésiennes de B.
3. Calculer les coordonnées polaires de C.
4. Justifier que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
5. Placer, précisément, les points A, B et C sur une figure.
6. Quelle est la nature du triangle ABC ? (Justifier)

Exercice 13

Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante : $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

1. Soit $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

   Démontrer que : $$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

2. En déduire que : $$\tan\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}.$$

Exercice 14

1. Résoudre, dans $]-\pi\,;\pi]$, l'équation : $\sin x = \sin(2x)$

   Représenter les éventuelles solutions sur le cercle trigonométrique.
2. Existe-t-il un angle aigu θ, non nul, ayant même sinus que 2θ ?

Exercice 15

Dans cet exercice, on donne : $$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis de $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

Exercice 16

1. Démontrer que, pour tout $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$: $\tan x = \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$
2. En déduire les valeurs exactes de $\tan\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

Exercice 17

ABC est un triangle non rectangle.

1. Démontrer que : $$\tan(A+B) = -\tan C$$
2. À l'aide de la relation $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ (que l'on pourra redémontrer au passage), prouver que :

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \,.\, \tan B \,.\, \tan C$$