Exercice 1

Huit sprinters effectuent deux 100 m. Leurs temps sont donnés dans le tableau suivant :

	Sprinter *A*	Sprinter *B*	Sprinter *C*	Sprinter *D*	Sprinter *E*	Sprinter *F*	Sprinter *G*	Sprinter *H*
Sprint 1	10"14	10"17	9"94	10"05	10"25	10"09	9"98	10"32
Sprint 2	10"41	9"97	9"96	10"12	10"19	10"24	10"12	10"17

Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant 8}$ les temps respectifs des sprinters A, B, ... , H au sprint 1 et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant 8}$ les temps respectifs des sprinters A, B, ... , H au sprint 2.

1. Calculer les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ des séries $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant 8}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant 8}$.
2. Calculer les écarts-types s_x et s_y des séries $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant 8}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant 8}$.
3. Lequel des deux sprints a été le plus homogène ?

Exercice 2

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ une famille de réels **ordonnés dans l'ordre croissant** de médiane m_e et de quartiles Q_1 et Q_3.

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ la famille de réels définis par : $y_i = ax_i + b$ pour tout $i \in [\![1 \,;\, N]\!]$.

Soit Q l'interquartile de $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ et Q' l'interquartile de $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$.

Démontrer que : $Q' = |a|Q$.

Exercice 3

Soit $(x_i,\, n_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une série statistique de moyenne $\overline{x}$ et de variance V_x.

On note $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$ (effectif total) et, pour tout $i \in [\![1 \,;\, p]\!]$: $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ (fréquence de x_i)

Soit g la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par : $g(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i\left(x_i - t\right)^2$.

1. Calculer la dérivée de g.
2. En déduire les variations de g.
3. En déduire que la fonction g admet un minimum en $t = \overline{x}$. Que vaut ce minimum ?

Exercice 4

1. Calculer, pour chaque mois de l'année, le jour médian ainsi que les jours qui correspondent au premier quartile et au troisième quartile.
2. Même question pour une année entière de 365 jours.

Exercice 5

Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Maths et en Physique :

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	0	0	0	1	0	1	1	3	4	4	1	3	2	2	1	1	0	0	0	0
Physique	0	1	0	0	2	0	1	2	1	1	4	2	2	0	3	2	1	0	1	0	1

Le but de l'exercice est de comparer la dispersion des notes en Maths et en Physique.

1. Utilisation des quartiles
   a) Calculer médiane m_e et quartiles Q_1 et Q_3 en Maths
   b) Calculer médiane m_e' et quartiles Q_1' et Q_3' en Physique
   c) Représenter les diagrammes en boîte des notes en Maths et en Physique. Interpréter.
2. Utilisation des écarts-types
   a) Calculer la moyenne m des notes en Maths et la moyenne des notes m' en Physique. Interpréter.
   b) Calculer l'écart-type s des notes en Maths et l'écart-type s' des notes en Physiques. Interpréter. (On considérera que les notes en Maths et les notes en Physique sont des grandeurs comparables et qu'il n'y a pas lieu de relativiser les écarts-types en utilisant des coefficients de variations)

Exercice 6

Quarante candidats passent un examen (noté de 0 à 20). Leur moyenne est de 9,5 et l'écart-type est égal à 2.

On veut effectuer une péréquation affine afin d'obtenir une moyenne de 10 et un écart-type de 3.

Notons $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant 40}$ les notes initiales et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant 40}$ les notes obtenues après changement affine.

On a donc :

$\overline{x} = 9$; $s_x = 2$. On pose : $y_i = ax_i + b$ où a (avec $a > 0$) et b sont à déterminer afin d'avoir $\overline{y} = 10$; $s_y = 3$.

1. Exprimer $\overline{y}$ en fonction de a, b et $\overline{x}$.
2. Exprimer s_y en fonction de a et s_x.
3. En déduire les valeurs de a et b. Quelle est la nouvelle note d'un candidat ayant initialement 5,6 ? (On arrondira à 10^{-1})
4. Quelle doit être les valeurs extrêmes des x_i afin que cette péréquation soit réalisable ? (On arrondira à 10^{-1})

Exercice 7 *Lorsque les statistiques se contredisent*

Le tableau suivant donne les temps de cinq sportifs qui ont couru un 1500m et un 5000m.

	Coureur 1	Coureur 2	Coureur 3	Coureur 4	Coureur 5
1500 m	3'58"17	4'05"48	4'12"97	4'08"29	4'00"12
5000 m	14'58"12	14'47"08	15'37"85	13'57"70	14'48"34

On veut déterminer quelle est la course la plus homogène.

1. Utilisation des coefficients de variation
   a) Calculer le temps moyen m, l'écart-type s puis le coefficient de variation $C_v = \dfrac{s}{m}$ pour le 1500 m. (On pourra convertir tous les temps en secondes)
   b) Calculer le temps moyen m', l'écart-type s' puis le coefficient de variation $C_v' = \dfrac{s'}{m'}$ pour le 5000 m.

c) Conclure.

2. Utilisation de l'interquartile relatif

a) Déterminer la médiane m_e et les quartiles Q_1 et Q_3 pour le 1500 m.

En déduire l'interquartile relatif $\dfrac{Q_3 - Q_1}{m_e}$.

b) Déterminer la médiane m_e' et les quartiles Q_1' et Q_3' pour le 5000 m.

En déduire l'interquartile relatif $\dfrac{Q_3' - Q_1'}{m_e'}$.

c) Conclure.

3. Donner une explication à la contradiction entre 1.c) et 2.c).

Exercice 8

Démontrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - x_j) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - x_j)^2 = 2n^2 V(x)$$