

# FONCTIONS POLYNÔMES

## 1. Fonction polynôme de degré quelconque

### 1.1. Définition

On appelle fonction polynôme (à coefficients réels) de degré  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) toute fonction  $P$  définie sur  $\mathbb{R}$  dont l'écriture peut se ramener à la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{où } a_0, a_1, \dots, a_n \text{ réels avec } a_n \neq 0$$

Le terme  $a_p x^p$  s'appelle monôme de degré  $p$ . On note  $n = \deg(P)$ .

### Exemples et contre-exemples :

- La fonction  $P$  définie par  $P(x) = 7x^6 - 5x^4 + 3x - 11$  est une fonction polynôme de degré 6.
- Toutes les fonctions puissances d'exposants entiers :  $p(x) = x^p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) sont des fonctions polynômes de degré  $p$  (avec la convention  $0^0 = 1$  lorsque  $p = 0$ ).
- Les fonctions affines  $x \mapsto ax + b$ , avec  $a \neq 0$ , sont des fonctions polynômes de degré 1.
- Les fonctions constantes  $x \mapsto k$ , avec  $k \neq 0$ , sont des fonctions polynômes de degré 0.
- La fonction  $Q$  définie par :  $Q(x) = x^3 + x + \frac{1}{x}$  n'est pas une fonction polynôme.
- Attention aux faux-amis ! La fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$  est une fonction polynôme de degré 2, car après simplifications, on obtient  $f(x) = x^2 - 1$ . Cependant, la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$  n'est pas une fonction polynôme car non définie pour  $x = \pm 1$ .

### Remarques :

- Une fonction polynôme à coefficients réels est continue sur  $\mathbb{R}$ . (Voir leçon sur le calcul différentiel)
- Une fonction du type  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  où tous les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont des réels nuls s'appelle la fonction polynôme nulle. Une telle fonction polynôme n'a pas de degré. (En fait, on considère, par convention, que c'est  $-\infty$  afin d'assurer la comptabilité de certaines relations sur les degrés)
- On peut définir des fonctions polynômes avec des coefficients dans un ensemble  $A$  autre que  $\mathbb{R}$ . (Cela peut être par exemple le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$ ). Cependant l'ensemble  $A$  doit posséder un certain nombre de propriétés algébriques ( $A$  doit être un anneau commutatif<sup>(1)</sup>).

(1)

<p><b>Notion de groupe</b> Un ensemble <math>G</math> est un groupe si il est muni d'une l.c.i. <math>*</math> (loi de composition interne) vérifiant les trois propriétés suivantes :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Existence d'un élément neutre <math>e</math> : <math>\forall x \in G, e * x = x * e = x</math></li> <li>• Associativité de la loi <math>*</math> : <math>\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z) = x * y * z</math></li> <li>• Existence d'un symétrique pour tout <math>x</math> de <math>E</math> : <math>\forall x \in G, \exists y \in G</math> tel que <math>x * y = y * x = e</math></li> </ul> <p>Si de plus la l.c.i. est commutative : <math>\forall x, y \in G, x * y = y * x</math></p> <p>Alors le groupe <math>(G, *)</math> est dit commutatif (ou Abélien). Dans ce cas la loi <math>*</math> sera souvent notée <math>+</math>, le neutre <math>e</math> noté <math>0</math> et le symétrique <math>y</math> noté <math>-x</math>.</p>	<p><b>Notion d'anneau</b> Un groupe commutatif <math>(A, +)</math> est un anneau s'il est muni d'une seconde l.c.i. notée généralement multiplicativement vérifiant les propriétés suivantes :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Associativité de la multiplication : <math>\forall x, y, z \in A, (x \times y) \times z = x \times (y \times z) = x \times y \times z</math></li> <li>• Distributivité par rapport à l'addition : <math>\forall x, y, z \in A, (x + y) \times z = x \times z + y \times z</math> et <math>z \times (x + y) = z \times x + z \times y</math></li> <li>• Existence d'un élément neutre noté <math>1</math> : <math>\forall x \in A, 1 \times x = x \times 1 = x</math></li> </ul> <p>Si de plus la seconde l.c.i. est commutative : <math>\forall x, y \in A, x \times y = y \times x</math></p> <p>Alors l'anneau <math>(A, +, \times)</math> est dit commutatif</p> <p>Un anneau commutatif <math>A</math> dans lequel tout élément non nul est inversible pour la multiplication (<math>\forall x \in A, \exists y \in A</math> tel que <math>x \times y = 1</math>) est appelé un corps. (L'inverse <math>y</math> de <math>x</math> sera souvent noté <math>x^{-1}</math>)</p> <p>Un anneau <math>A</math> est intègre si : <math>\forall x, y \in A, xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0)</math></p>
---	--

- On appelle polynôme  $P$  sur un anneau  $A$ , toute suite  $(a_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) d'éléments de  $A$  tous nuls sauf un nombre fini. L'indice  $n$  du dernier élément non nul de la suite (il existe en général puisque seuls un nombre fini d'éléments de la suite sont non nuls). Le seul cas où l'entier  $n$  n'existe pas est lorsque tous les éléments de la suite  $(a_n)$  sont nuls) s'appelle le degré de  $P$ . On note  $X$  le polynôme défini par la suite particulière  $(0; 1; 0; 0; \dots; 0; \dots)$ .  $X$  s'appelle l'indéterminée (c'est un polynôme particulier). On montre alors que tout polynôme  $P$  de degré  $n$  peut s'écrire  $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$  où  $X^n$  désigne la suite  $(0; \dots; 0; 1; 0; \dots)$  avec un "1" en  $n^{\text{ème}}$  position (c'est le cœur de la construction de la théorie des polynômes, mais la démonstration n'est pas à la portée de ce cours ...). Enfin, précisons que si un polynôme  $P$  a tous ses coefficients nuls, on dit que  $P$  est le polynôme nul et avec la même convention que pour les fonctions polynômes, on pose alors  $\deg(P) = -\infty$ .
- Il est d'usage de confondre fonction polynôme et polynôme. Cela est loisible lorsque les coefficients sont dans  $\mathbb{R}$  (ou dans un corps commutatif). Mais un tel abus peut tomber en défaut si les coefficients sont dans un anneau  $A$  non intègre. (Voir divers encadrés ci-dessous)

Exercice : Soient  $P$  et  $Q$  des fonctions polynômes non nulles. Démontrer que :

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P); \deg(Q)) \text{ et } \deg(PQ) \leq \deg(P) + \deg(Q)$$

Notons  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  avec  $a_n \neq 0$  et  $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$  avec  $b_m \neq 0$ .

Pour la somme  $P + Q$ , distinguons trois cas :

- Si  $m < n$  alors,  $P(x) + Q(x) = a_n x^n + \dots$  donc  $\deg(P + Q) = \deg(P)$ .
- Si  $n < m$  alors,  $P(x) + Q(x) = b_m x^m + \dots$  donc  $\deg(P + Q) = \deg(Q)$ .
- Si  $n = m$  alors,  $P(x) + Q(x) = (a_n + b_n)x^n + \dots$ 
  - ♦ Si  $a_n + b_n \neq 0$  alors  $\deg(P + Q) = n = \deg(P)$ .
  - ♦ Si  $a_n + b_n = 0$ , alors  $\deg(P + Q) < n$ , c'est-à-dire  $\deg(P + Q) < \deg(P)$ .

Bilan : dans tous les cas, on a  $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P); \deg(Q))$

Pour le produit  $PQ$ , on écrit  $PQ = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0)$

En développant, on obtient :  $PQ = a_n b_m x^{n+m} + \dots$  (termes de degré inférieurs)

En général (et notamment si les coefficients sont réels),  $a_n b_m \neq 0$  (puisque  $a_n \neq 0$  et  $b_m \neq 0$ ).

Donc, en général,  $\deg(PQ) = n + m = \deg(P) + \deg(Q)$ .

Si les coefficients ne sont pas réels, on peut ne pas avoir l'égalité  $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$   
 Dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , considérer  $P = \bar{2}X$  et  $Q = \bar{2}X$  ( $\deg(P) = \deg(Q) = 1$ )  
 $PQ = \bar{2}X \times \bar{2}X = \bar{4}X^2 = \bar{0}$ , donc  $\deg(PQ) = -\infty$

## 2. Division euclidienne d'un polynôme $A$ par un polynôme $B$ (non nul)

Dans ce paragraphe, les polynômes considérés sont à coefficients réels (ou dans un corps commutatif  $\mathbb{K}$ ).

On rappelle que dans ce cas, si  $A$  et  $B$  sont des polynômes non nuls, on a :  $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$ .

### 2.1. Théorème

Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes à coefficients réels (ou dans un corps commutatif  $\mathbb{K}$ ) avec  $B \neq 0$ .

Il existe un unique couple  $(Q, R)$  de polynômes à coefficient réels tels que :

$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B)$$

### Exemple et calcul pratique de $Q$ et $R$ :

$$A = X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6$$

$$B = X^2 - 5X + 4$$

On pose la division en utilisant les mêmes principes que pour la division des nombres :

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6 & X^2 - 5X + 4 \\ \hline X^4 - 5X^3 + 4X^2 & X^2 - 2X + 3 \\ \hline -2X^3 + 13X^2 - 17X + 6 & \\ -2X^3 + 10X^2 - 8X & \\ \hline 3X^2 - 9X + 6 & \\ 3X^2 - 15X + 12 & \\ \hline 6X - 6 & \end{array}$$

On a donc  $Q = X^2 - 2X + 3$  et  $R = 6X - 6$ .

Ce qui nous permet d'écrire :

$$X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6 = (X^2 - 5X + 4)(X^2 - 2X + 3) + 6X - 6$$

### Démonstration du théorème 2.1.

#### Unicité du couple $(Q, R)$ :

Supposons qu'il existe des couples  $(Q_1, R_1)$  et  $(Q_2, R_2)$  de polynômes tels que :

$$A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$$

avec  $\deg(R_1) < \deg(B)$  et  $\deg(R_2) < \deg(B)$ .

Posons : 
$$Q = Q_1 - Q_2 \text{ et } R = R_2 - R_1$$

Ainsi : 
$$BQ = BQ_1 - BQ_2 = R_2 - R_1 = R$$

Et comme  $\deg(R_1) < \deg(B)$  et  $\deg(R_2) < \deg(B)$ , on en déduit :

$$\deg(R) < \deg(B) \quad (*)$$

Mais par ailleurs, si  $Q \neq 0$ , on a :  $\deg(R) = \deg(BQ) = \deg(B) + \deg(Q)$ .

Comme  $\deg(Q) \geq 0$  puisque  $Q \neq 0$ , on a :  $\deg(R) \geq \deg(B)$  (\*\*)

La condition (\*\*) contredit (\*) donc  $Q = 0$ .

On en déduit  $Q_1 = Q_2$  et donc  $BQ = R = 0$  d'où  $R_1 = R_2$ , d'où l'unicité du couple  $(P, Q)$ .

#### Existence du couple $(Q, R)$ :

Notons :

$$A(x) = a x^d + \dots \text{ (termes de degrés inférieurs) avec } d = \deg(A) \text{ et donc } a \neq 0$$

$$B(x) = b x^n + \dots \text{ (termes de degrés inférieurs) avec } n = \deg(B) \text{ et donc } b \neq 0$$

Si  $d < n$ , alors  $Q = 0$  et  $R = A$  conviennent (puisque  $A = B \times 0 + A$  avec  $\deg(A) < \deg(B)$ )

Supposons désormais  $n \geq d$  :

Considérons le polynôme  $Q_1$  défini par :  $Q_1(x) = \frac{a}{b} x^{d-n}$  (bien défini car  $b \neq 0$ )

$$\text{On a ainsi : } Q_1 B = \frac{a}{b} x^{d-n} \times (b x^n + \dots) = a x^d + \dots$$

Si on pose alors :  $A_1 = A - Q_1 B$ , on obtient alors un polynôme de degré  $d_1$  tel que  $d_1 < d$ .

Maintenant, si  $d_1 < n$  alors  $Q = Q_1$  et  $R = A_1$  conviennent (puisque  $A = BQ_1 + A_1$  avec  $\deg(A_1) < \deg(B)$ )

Si non, on réitère le procédé comme ci-dessus en construisant des polynômes  $Q_2$  et  $A_2$  à partir de  $A_1$  et  $B$  :

$$Q_2(x) = \frac{a_1}{b} x^{d_1-n} \text{ et } A_2 = A_1 - Q_2B$$

où  $a_1$  désigne le coefficient principal de  $A_1$ .

Ainsi, on vérifie que :  $\deg(A_2) < \deg(A_1) < \deg(A)$  et  $A = B(Q_1 + Q_2) + A_2$ .

Et ainsi de suite...

Le processus s'arrête nécessairement au bout d'un nombre fini  $N$  d'étapes (puisque la suite des degrés ( $d_k$ ) est une suite d'entiers naturels strictement décroissante, donc il existe un rang  $N$  tel que  $d_N < n$ ). On a alors :

$$A = B(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N) + A_N$$

Les polynômes  $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N$  et  $R = A_N$  conviennent (puisque  $\deg(A_N) < \deg(B)$ )

Exemple : En reprenant

$$A = X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6$$

$$B = X^2 - 5X + 4$$

et la division posée ci-dessus, on a :  $N = 3$ ,  $Q_1 = X^2$  ;  $Q_2 = -2X$  et  $X_3 = 3$ .

Cas particulier : si  $R = 0$ , alors  $A = BQ$ , on dit alors que le polynôme  $B$  divise  $A$ .

### 3. Racine d'un polynôme et factorisation d'un polynôme

#### 3.1. Définition

On appelle racine réelle d'une fonction polynôme  $P$  (à coefficients réels) tout réel  $\lambda$  tel que :

$$P(\lambda) = 0.$$

Exemples :

- Trouver les racines de la fonction polynôme  $P$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 1)$ .  
Il y a une racine évidente :  $x_1 = 1$ . Les autres s'obtiennent en étudiant le trinôme  $x^2 - x - 1$ .  
On a  $\Delta = 5$  d'où  $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  et  $x_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .
- Les fonctions polynômes du 1<sup>er</sup> degré  $x \mapsto ax + b$  (où  $a$  et  $b$  sont des réels avec  $a \neq 0$ ) admettent toutes une seule racine  $\lambda = -\frac{b}{a}$ .
- Certaines fonctions polynômes n'ont aucune racine réelle. Par exemple  $x^2 + 1$  qui est strictement positif.  
Remarque : une fonction polynôme sans racine réelle est nécessairement de signe constant (puisque continue).

#### 3.2. Théorème

Si une fonction polynôme  $P$  à coefficients réels de degré  $n$  ( $n \geq 1$ ) a une racine réelle  $x = \lambda$ , alors on peut factoriser  $P(x)$  par  $(x - \lambda)$  :

$$P(x) = (x - \lambda) Q(x) \text{ où } Q \text{ est une fonction polynôme de degré } n - 1.$$

Exemple : ce théorème est quotidiennement illustré par les égalités remarquables :

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-1}) \text{ (vérification facile)}$$

### Démonstration :

On effectue la division euclidienne de  $P$  par  $X - \lambda$ . D'après le théorème, il existe un couple  $(Q, R)$  de polynômes tels que :

$$P = (X - \lambda)Q + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(X - \lambda)$$

Or,  $\deg(X - \lambda) = 1$ , donc  $\deg(R) = 0$  ou  $-\infty$ .  $R$  est donc une fonction polynôme constante.

Par ailleurs,  $\lambda$  est une racine de  $P$ . On a donc :  $0 = P(\lambda) = (\lambda - \lambda)Q(\lambda) + R(\lambda)$

Donc  $R(\lambda) = 0$ . Donc  $R$  est la fonction polynôme nulle et le théorème est pratiquement démontré. Il reste encore à prouver que  $\deg(Q) = n - 1$ , ce qui est une conséquence de la relation  $\deg(P) = \deg(X - \lambda) + \deg(Q)$  (On a égalité puisque les coefficients sont réels) d'où :  $n = 1 + \deg(Q)$ , c.q.f.d.

### 3.3. Théorème

Une fonction polynôme  $P$  de degré  $n \in \mathbb{N}$  à coefficients réels possède au plus  $n$  racines réelles.

### Démonstration :

Puisque  $P$  a un degré,  $P$  n'est pas la fonction polynôme nulle.

Raisonnons par l'absurde. Si la fonction  $P$  possède  $p$  racines avec  $p > n$ , en notant  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  ces racines, on a, d'après le théorème de factorisation (appliqué  $p$  fois) :

$$P(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_p)Q(x)$$

où  $Q$  est une fonction polynôme de degré  $n - p < 0$ , donc  $Q = 0$  et, par suite,  $P = 0$ , ce qui contredit l'hypothèse initiale d'où  $p \leq n$ .

La fonction polynôme  $P$  possède donc au plus  $n$  racines réelles.

Ce théorème peut ne pas être valable si les coefficients sont non réels :

Dans  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ , considérer  $P = X^2 - \bar{1}$

$P$  est de degré 2 et possède pourtant 4 racines :

$$\tilde{P}(\bar{1}) = \tilde{P}(\bar{3}) = \tilde{P}(\bar{5}) = \tilde{P}(\bar{7}) = \bar{0}$$

### 3.4. Corollaire

Une fonction polynôme  $P$  à coefficients réels de degré  $n$  admettant plus de  $n$  (ou une infinité) de racines réelles est la fonction polynôme nulle.

### Démonstration :

Si  $P$  n'est pas la fonction polynôme nulle, alors elle a un degré  $n \in \mathbb{N}$  et d'après le théorème 3.3. admet au plus  $n$  racines réelles. Donc si elle admet plus que  $n$  (ou une infinité) de racines réelles, elle est nécessairement nulle.

Application : démontrer que deux fonctions polynômes  $P$  et  $Q$  à coefficients réels de degré au plus  $n$  qui coïncident en  $n + 1$  points sont égales.

Il suffit de considérer la fonction polynôme  $P - Q$  qui est de degré au plus  $n$  et qui possède  $n + 1$  racines réelles.

Donc, d'après le corollaire,  $P - Q$  est la fonction polynôme nulle donc  $P = Q$ .

## 4. Égalité entre deux polynômes

### 4.1. Définition

- Deux fonctions polynômes  $P$  et  $Q$  sont égales si :  $P(x) = Q(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

(C'est l'égalité telle qu'elle a été définie pour les fonctions)

- Deux polynômes  $P$  et  $Q$  sont égaux si les suites qui les définissent sont égales.

(Ceci entraîne nécessairement :  $\deg(P) = \deg(Q)$  et les coefficients des monômes de même degré de  $P$  et  $Q$  sont égaux)

### Exemples :

- Les fonctions  $P$  et  $Q$  définies par :  $P(x) = x^4 + 1$  et  $Q(x) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$  sont-elles égales ?

On a  $P(0) = Q(0) = 1$  ;  $P(1) = Q(1) = 2$  ;  $P(-1) = Q(-1) = 2$  et  $P(2) = Q(2) = 17$ .

$P$  et  $Q$  semblent égales, cependant il faut le vérifier pour toute valeur de  $x \in \mathbb{R}$ . Ce qui peut être long si l'on ne dispose de critère plus adapté.

- Les fonctions  $R$  et  $S$  définies par  $R(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$  et  $S(x) = x^3 - x$  sont-elles égales ?

On a  $R(0) = S(0) = 0$ ,  $R(1) = S(1) = 0$ ,  $R(-1) = S(-1) = 0$  et  $R(3) = S(3) = 24$ .

La encore,  $R$  et  $S$  semblent égales alors qu'elles ne sont pas du même degré.

Le théorème suivant est un critère pratique pour comparer des fonctions polynômes :

### 4.2. Théorème

Deux fonctions polynômes  $P$  et  $Q$  à coefficients réels sont égales ssi :

- elles ont même degré
- les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

Ce théorème peut ne pas être valable si les coefficients sont non réels :

Dans  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , considérer  $P = X$  et  $Q = X^3$ .

$\tilde{P}(\bar{0}) = \tilde{Q}(\bar{0}) = \bar{0}$ ,  $\tilde{P}(\bar{1}) = \tilde{Q}(\bar{1}) = \bar{1}$  et

$\tilde{P}(\bar{2}) = \tilde{Q}(\bar{2}) = \bar{2}$ . On a  $\tilde{P} = \tilde{Q}$  et  $P \neq Q$ .

Autrement dit, des fonctions polynômes à coefficients réels sont égales si et seulement si leur polynômes correspondant le sont.

Démonstration : Soient  $P$  et  $Q$  des fonctions polynômes à coefficients réels.

Notons :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (n \text{ est le degré de } P \text{ donc } a_n \neq 0)$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \quad (m \text{ est le degré de } Q \text{ donc } b_m \neq 0)$$

Supposons  $P = Q$  (c'est-à-dire, d'après la définition  $P(x) = Q(x)$ , pour tout réel  $x$ ) avec pour fixer les idées l'hypothèse  $n \geq m$ .

Alors : 
$$P(x) - Q(x) = a_n x^n + \dots + (a_m - b_m)x^m + \dots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

En outre  $P(x) - Q(x) = 0$  pour tout réel  $x$ , donc la fonction polynôme  $P - Q$  admet une infinité de racines, c'est donc la fonction polynôme nulle.

Par conséquent, tous ses coefficients sont nuls, donc  $a_0 = b_0$  ;  $a_1 = b_1$  ; ... ;  $a_m = b_m$  et  $n = m$  puisqu'on ne peut avoir  $a_n = 0$  par hypothèse. La réciproque est évidente.

Exemples : poursuivons les deux exemples précédents :

- En développant  $Q(x)$ , on obtient :  $Q(x) = x^4 - \sqrt{2}x^3 + x^2 + \sqrt{2}x^3 - 2x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - 2x + 1 = x^4 + 1 = P(x)$
- $R$  et  $S$  ne sont pas de même degré donc elles ne sont pas égales. (Pour s'en convaincre complètement, calculer  $R(2)$  et  $S(2)$ )

### Exercices :

- Factoriser  $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - x - 2$  sachant que  $P(2) = 0$ . (En effet,  $P(2) = 24 - 20 - 2 - 2 = 0$ )

D'après le théorème de factorisation, on peut écrire :

$$P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c.$$

On utilise maintenant le théorème 3 pour identifier les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  avec ceux de  $P(x)$  :

$$a = 3 ; b - 2a = -5 ; c - 2b = -1 \text{ et } -2c = -2 \text{ d'où } P(x) = (x - 2)(3x^2 + x + 1).$$

On ne peut pas factoriser davantage car le trinôme  $3x^2 + x + 1$  est toujours strictement positif.

$$(\text{En effet, } \Delta = -11 < 0 \text{ et } a = 3 > 0)$$

L'intérêt de ce théorème est toujours la résolution d'équations et d'inéquations :

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ et } P(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2.$$

- Résoudre l'inéquation  $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2 \geq 0$

Il y a deux racines évidentes 1 et -1. En factorisant, on obtient :  $(x^2 - 1)(x^3 - 2x^2 - x + 2)$ .

Il y a encore 1 et -1 comme racines évidentes, on aboutit alors à :  $(x^2 - 1)^2(x - 2)$ .

On conclut facilement :  $S = [2 ; +\infty[ \cup \{-1\} \cup \{1\}$

- Résoudre  $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$  sachant que 2 est racine. Réponse :  $S = \{2 ; 3 ; -4\}$ .