LES HOMOTHÉTIES

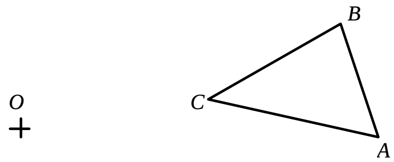
I) Généralités

Définition : On appelle homothétie de centre O et de rapport k ($k \neq 0$) la transformation pour laquelle un point M du plan a pour image le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$

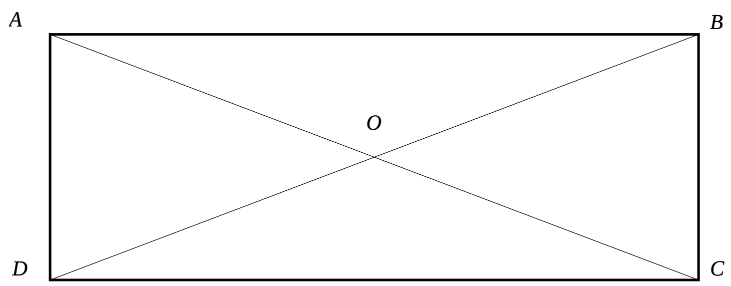
Exemples : dans chacun des cas ci-dessous, construire l'image de la figure par l'homothétie de centre O et de rapport k. Préciser également s'il s'agit d'un agrandissement ou d'une réduction.

$k = 2$

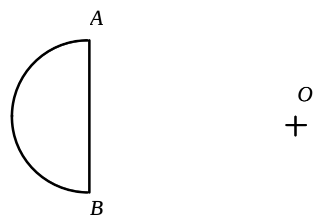
Dans chaque cas, on écrira des relations de colinéarité du type : $\overrightarrow{OA'} = 2\,\overrightarrow{OA}$



$k = \frac{1}{2}$



$k = -2$



Théorème 1 : dans une homothétie, un point, son image et le centre sont _________________.

Démonstration : par définition, la relation $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont ____________________, donc les points O, M et M' sont ____________________.

Théorème 2 : Si une homothétie de rapport k transforme M en M' et N en N', alors on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$.

Démonstration : $$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'} = k\,\overrightarrow{MO} + k\,\overrightarrow{ON} = k(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}) = k\,\overrightarrow{MN}$$

Conséquences : * une homothétie transforme une droite en une droite _________________.

* une homothétie multiplie les distances par _______________.

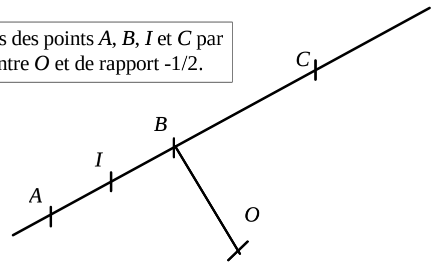
Exercice : démontrer qu'une homothétie h transforme un triangle en un triangle semblable :

II) Propriétés des homothéties

1) Conservation :

- l'homothétie **ne conserve pas les distances**
- l'homothétie conserve :
  - l'alignement.
  - les angles (et en particulier l'angle droit).
  - le milieu d'un segment.
  - les relations de colinéarité.

Construire les images des points A, B, I et C par l'homothétie de centre O et de rapport -1/2.



2) Action sur les figures :

Une homothétie h de rapport k ($k \neq 0$) transforme :

- une droite d en une droite d' **parallèle** à d.
- un segment $[MN]$ en un segment $[M'N']$ parallèle tel que $M'N' = |k| MN$.
- un cercle C de rayon R en un cercle C' de rayon $|k| R$.
- un triangle (isocèle, rectangle, équilatéral) en un triangle de même nature.
- un quadrilatère (parallélogramme, losange, rectangle, carré) en un quadrilatère de même nature.

III) Cas particuliers

Certaines homothéties sont des transformations déjà connues, c'est ce qui se passe pour certaines valeurs du rapport k.

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k.

Soit M un point du plan et M' son image par l'homothétie h ($M' = h(M)$).

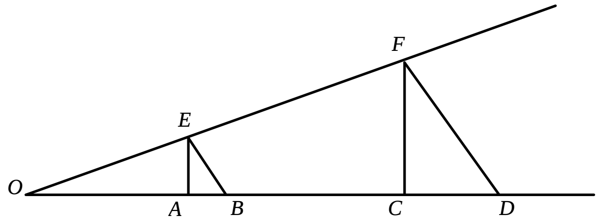
$k = 1$: On a, par définition : $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}$ donc $M' = M$. Donc h est _________________.

$k = -1$: On a, dans ce cas : $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM}$, ce qui signifie que O est le ____________ du segment $[MM']$ donc h est la________________________ de centre O.

$|k| > 1$: dans ce cas, l'homothétie réalise un _____________________.

$|k| < 1$: dans ce cas, l'homothétie réalise une ____________________.

IV) Exercices d'applications



Exercice 1 : Dans la figure ci-contre, les droites (AE) et (CF) sont parallèles, ainsi que les droites (BE) et (DF). Quelle est l'image du point B dans l'homothétie de centre O qui transforme A en C ?

Exercice 2 : Soit C un cercle de centre O et A un point de C. Construire l'image du cercle C par l'homothétie :

- de centre O et de rapport 3/4
- de centre O et de rapport -2
- de centre A et de rapport 3/2
- de centre A et de rapport -1
- de centre A et de rapport 1
- de centre O et de rapport -1.

Exercice 3 : Soient [AB] et [CD] deux segments parallèles de longueurs différentes.

a) Construire les centres de deux homothéties h_1 et h_2 qui transforment [AB] en [CD].

b) Si $AB = 3$ et $CD = 4.5$, quels sont les rapports de h_1 et h_2 ?