

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

1) Ensemble E_k des points M du plan tels que $\vec{u} \cdot \vec{AM} = k$ ($k \in \mathbb{R}$)

On donne : un vecteur \vec{u} non nul, un point A et un réel k .

L'ensemble E_k s'appelle la ligne de niveau k de l'application $M \mapsto \vec{u} \cdot \vec{AM}$.

Méthode de détermination de E_k :

Soit \mathcal{D} la droite passant par A et dirigée par \vec{u} .

Soit H le point de la droite \mathcal{D} tel que $\vec{u} \cdot \vec{AH} = k$.



Ainsi :

$$\vec{u} \cdot \vec{AM} = \vec{u} \cdot \vec{AH}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{AM} - \vec{AH}) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{HM} = 0$$

Conclusion : E_k est la droite passant par H admettant \vec{u} comme vecteur normal.

Exemples :

Soit $[AB]$ un segment de longueur 4.

1) Recherche de l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 24$.

Soit H le point de la droite (AB) tel que $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = 24$. Ainsi, les vecteurs \vec{AB} et \vec{AH} sont colinéaires de même sens et on a : $AB \times AH = 24$ d'où $AH = 6$.

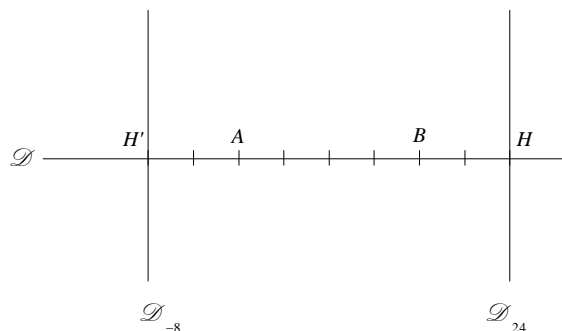
L'ensemble recherché est la droite \mathcal{D}_{24} orthogonale à la droite (AB) en H .

2) Recherche de l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = -8$.

Soit H' le point de la droite (AB) tel que $\vec{AB} \cdot \vec{AH'} = -8$. Ainsi, les vecteurs \vec{AB} et $\vec{AH'}$ sont colinéaires de sens opposés et on a : $AB \times AH' = 8$ d'où $AH' = 2$.

L'ensemble recherché est la droite \mathcal{D}_{-8} orthogonale à la droite (AB) en H' .

Figure :



2) Transformation de $MA^2 + MB^2$, $MA^2 - MB^2$ et $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ (et lignes de niveau correspondantes)

Soient A et B deux points distincts du plan, I le milieu de $[AB]$ et M un point quelconque du plan.

On note $AI = IB = r$.

a) Transformation de $MA^2 + MB^2$

On a $MA^2 = \vec{MA}^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2$

$$\left. \begin{array}{l} \text{d'où } MA^2 = MI^2 + IA^2 + 2 \vec{MI} \cdot \vec{IA} \\ \text{de même, } MB^2 = MI^2 + IB^2 + 2 \vec{MI} \cdot \vec{IB} \end{array} \right\} (*)$$

En additionnant, on obtient :

$$MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2 \vec{MI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB})$$

Or, comme I est le milieu de $[AB]$, on a : $\vec{IA} + \vec{IB} = 0$ et $IA = IB = \frac{AB}{2}$, donc :

$$\boxed{MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + \frac{AB^2}{2}}$$

(formule dite "de la médiane")

Application : ensemble E_k des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = k$ (ou ligne de niveau k de l'application $M \mapsto MA^2 + MB^2$)

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= k \\ 2 MI^2 + \frac{AB^2}{2} &= k \\ MI^2 &= \frac{k - \frac{AB^2}{2}}{2} \end{aligned}$$

- Si $k < \frac{AB^2}{2}$, alors aucun point M ne vérifie l'égalité ci-dessus. Donc $E_k = \emptyset$
- Si $k = \frac{AB^2}{2}$, alors $M = I$. Donc $E_k = \{I\}$
- Si $k > \frac{AB^2}{2}$, alors $IM = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{AB^2}{4}}$. Donc E_k est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{k}{2} - \frac{AB^2}{4}}$.

Exemples :

Soit $[AB]$ un segment de longueur 4.

L'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 40$ est le cercle \mathcal{C}_{40} de centre le milieu I de $[AB]$ et de rayon 4.

L'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 10$ est le cercle \mathcal{C}_{10} de centre le milieu I de $[AB]$ et de rayon 1.

b) Transformation de $MA^2 - MB^2$

On a $MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2$

$$\left. \begin{aligned} \text{d'où } MA^2 &= MI^2 + IA^2 + 2 \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} \\ \text{de même, } MB^2 &= MI^2 + IB^2 + 2 \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} \end{aligned} \right\} (*)$$

En soustrayant, on obtient :

$$MA^2 - MB^2 = IA^2 - IB^2 + 2 \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB})$$

Or, comme I est le milieu de $[AB]$, on a : $IA^2 - IB^2 = 0$

Donc :

$$MA^2 - MB^2 = 2 \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$$

Application : ensemble E_k des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = k$ (ou ligne de niveau k de l'application $M \mapsto MA^2 - MB^2$)

$$MA^2 - MB^2 = k$$

$$2 \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = k$$

$$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{k}{2}$$

D'après 1), E_k est une droite orthogonale à (AB) .

Exemple :

Soit $[AB]$ un segment de longueur 4.

Recherche de l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 24$. Donc tel que $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$.

Soit H le point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IH} = 12$. Ainsi, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{IH} sont colinéaires de même sens et on a : $AB \times IH = 12$ d'où $IH = 3$.

L'ensemble recherché est la droite \mathcal{D}_{24} orthogonale à la droite (AB) en H .

c) Transformation de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$$

Or, $\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 0$ (puisque I est le milieu de $[AB]$) et $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -IA^2 = -\frac{AB^2}{4}$.

On a donc :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Application : ensemble E_k des points M du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k$ (ou ligne de niveau k de l'application $M \mapsto MA^2 + MB^2$)

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k$$

$$MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k$$

$$MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

- Si $k < -\frac{AB^2}{4}$, alors aucun point M ne vérifie l'égalité ci-dessus. Donc $E_k = \emptyset$
- Si $k = -\frac{AB^2}{4}$, alors $M = I$. Donc $E_k = \{I\}$
- Si $k > -\frac{AB^2}{4}$, alors $IM = \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$. Donc E_k est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$.

En particulier, si $k = 0$ alors E_0 est le cercle de centre I et de rayon r , c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.

Exemples :

Soit $[AB]$ un segment de longueur 4.

L'ensemble des points M du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 12$ est le cercle \mathcal{C}_{12} de centre le milieu I de $[AB]$ et de rayon 4.

L'ensemble des points M du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -4$ est le point I .

3) Transformation de $MA = k MB$

Soient A et B deux points distincts du plan, I le milieu de $[AB]$ et M un point quelconque du plan.

On note $AI = IB = r$. Déjà, précisons que si $k = 1$, alors l'ensemble des points M vérifiant $MA = k MB = MB$ est la médiatrice du segment $[AB]$. Précisons également que si $k < 0$ alors il n'existe pas de points M vérifiant la relation $MA = k MB$. Dans ce qui suit, on suppose $k \geq 0$ et $k \neq 1$.

Les égalités suivantes sont équivalentes :

$$MA = k MB$$

$$MA^2 = k^2 MB^2$$

$$\vec{MA}^2 = k^2 \vec{MB}^2$$

$$(\vec{MA} - k \vec{MB}) \cdot (\vec{MA} + k \vec{MB}) = 0$$

Introduisons le barycentre G_1 de $(A, 1)$ et $(B, -k)$ et le barycentre G_2 de $(A, 1)$ et (B, k) .

(Ces barycentres existent bien car $k \neq 1$ et $k \neq -1$)

On obtient alors :

$$(1 - k) \vec{MG}_1 \cdot (1 + k) \vec{MG}_2 = 0$$

Et comme $(1 - k)(1 + k) \neq 0$:

$$\vec{MG}_1 \cdot \vec{MG}_2 = 0$$

M est situé sur le cercle de diamètre $[G_1G_2]$