

# PROBABILITÉS (discrètes)

## Introduction

Le but de chapitre est de construire un modèle pour décrire les expériences aléatoires. De telles expériences sont par exemple : le numéro obtenu en lançant un dé, la face obtenue en lançant une pièce de monnaie, la carte obtenue en la tirant au hasard d'un jeu, le tirage du loto, etc... Le besoin d'avoir une méthode systématique de description de telles expériences est justifié par le fait que certains résultats qui nous sont parfois intuitivement évidents et que nous n'arrivons pas toujours à expliquer sont en fait faux ! Comme en témoigne l'exercice suivant :

*Un homme rend visite à une famille ayant deux enfants. L'un des deux enfants, un garçon, entre dans la pièce, calculer la probabilité que les deux enfants soient des garçons.*

## **I) Expérience aléatoire, événements**

---

### **1) Expérience aléatoire, issues, univers**

Lancer une pièce de monnaie et observer le côté exposé de la pièce est une expérience dont on ne peut prévoir le résultat parmi deux éventualités (ou issues) possibles. Une telle expérience est dite *aléatoire*. Elle comporte deux issues possibles : pile ou face. (Ou plus selon le point de vue adopté)

De même, tirer un jeton d'une urne contenant 100 jetons numérotés 00, 01, 02, ..., 99 et observer le nombre obtenu est une expérience aléatoire comportant cent issues.

#### Définition

L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé univers (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble  $\Omega$ .

À notre niveau,  $\Omega$  sera toujours un ensemble fini.

#### Exemples :

On lance un dé et on regarde la face obtenue :  $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

On lance un dé et on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair :  $\Omega = \{P ; I\}$

On lance une pièce de monnaie :  $\Omega = \{P ; F\}$

On lance deux pièces de monnaie :  $\Omega = \{PP ; PF ; FP ; FF\}$

On lance deux dés :  $\Omega = \{(i, j) \text{ où } 1 \leq i \leq 6 \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}$

Remarquons qu'une même expérience peut déboucher sur des univers différents suivant les hypothèses faites : par exemple, si on lance deux dés et qu'on fait le produit  $P$  ou la somme  $S$  des deux chiffres obtenus, on obtient respectivement :

$\Omega_P = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 16 ; 18 ; 20 ; 24 ; 25 ; 30 ; 36\}$

$\Omega_S = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$ .

## 2) Événements associés à une expérience aléatoire

Exemple : on lance deux dés et on considère la somme  $S$  obtenue. L'ensemble de toutes les issues possibles (**univers**) est  $\Omega = \{2 ; 3 ; \dots ; 11 ; 12\}$ .

Le tableau ci-dessous définit le vocabulaire relatif aux événements (en probabilité)

Vocabulaire	Signification	Illustration
Événement élémentaire (Noté $\omega$ )	L'une des issues de la situation étudiée (un élément de $\Omega$ )	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Événement (Notation quelconque)	Ensemble de plusieurs issues	Obtenir un nombre pair : $A = \{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12\}$ Obtenir un multiple de trois : $B = \{3 ; 6 ; 9 ; 12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10 ; 11 ; 12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
Événement "A et B" (Noté $A \cap B$ )	Événement constitué des issues communes aux 2 événements	$A \cap B = \{6 ; 12\}$
Événements "A ou B" (Noté $A \cup B$ )	Événement constitué de toutes les issues des deux événements	$A \cup B = \{2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12\}$
Événements incompatibles (On note alors $A \cap B = \emptyset$ )	Ce sont de événements qui n'ont pas d'éléments en commun	$C \cap D = \emptyset$ donc $C$ et $D$ sont incompatibles. Par contre, $A$ et $B$ ne le sont pas.
Événements contraires (L'événement contraire de $A$ se note $\bar{A}$ )	Ce sont deux événements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues ( $\Omega$ )	Ici, $\bar{A}$ représente l'événement "obtenir une somme impaire". On a alors : $A \cap \bar{A} = \emptyset$ (ensembles disjoints) $A \cup \bar{A} = \Omega$

## II) Calcul des probabilités

### 1) Loi de probabilité sur un univers $\Omega$

#### Définition

Soit  $\Omega$  l'univers d'une expérience aléatoire. Définir une loi de probabilité  $P$  sur  $\Omega$ , c'est associer, à chaque événement élémentaire  $\omega_i$ , des nombres  $p_i \in [0 ; 1]$  tels que :

$$\sum_i p_i = 1$$

Les nombres  $p_i$  sont alors appelés probabilités. On note aussi :  $p_i = P(\omega_i)$ .

Le principe suivant permet de calculer la probabilité d'un événement quelconque :

**Principe fondamental** : la probabilité  $P(E)$  d'un événement  $E$  est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

En particulier,  $P(\Omega) = 1$ . En effet :  $P(\Omega) = P\left(\coprod_i \omega_i\right) = \sum_i P(\omega_i) = \sum_i p_i = 1$ .

Exemple : soit un dé truqué dont les probabilités d'apparitions des faces sont données par le tableau suivant :

Issue $\omega$	1	2	3	4	5	6
Probabilité $P(\omega)$	0,05	0,05	0,1	0,1	0,2	inconnue

Calculer la probabilité de l'événement  $A =$  "obtenir un résultat inférieur ou égal à 4" :

D'après le principe,  $P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0,3$

L'événement élémentaire "obtenir 1" est noté abusivement 1. Idem pour les autres.

Calculer la probabilité d'obtenir 6 :

D'après la définition,  $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$ , donc  $P(6) = 0,5$ .

## 2) Une situation fondamentale : l'équiprobabilité

### Définition

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité ou que la loi de probabilité est équirépartie.

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un événement  $A$  est la suivante :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Dans le cas d'un événement élémentaire  $\omega$ , on a :  $P(\omega) = \frac{1}{N}$  où  $N$  est le nombre d'issues possibles ( $N = \text{Card}(\Omega)$ )

(Ces formules sont des conséquences directes du principe fondamental et de la définition)

Donnons des exemples : on lance un dé (non truqué) ;  $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$  : situation d'équiprobabilité.

- Calculons la probabilité d'obtenir 5 :  $P(5) = 1/6$ . (5 est un événement élémentaire)
- Calculons la probabilité d'obtenir un nombre pair ;  $P(\text{"obtenir un nombre pair"}) = 3/6 = 1/2$ .

Et des contre-exemples :

- Dans la situation du dé truqué (voir ci-dessus), on n'a pas équiprobabilité puisque  $P(1) \neq P(2)$ .
- Dans la situation du lancer de deux dés où l'on fait la somme des résultats obtenus, l'univers est constitué d'événements non équiprobables ( $\Omega = \{2 ; 3 ; \dots ; 11 ; 12\}$ ) et on a, par exemple,  $P(2) = 1/36$  et  $P(7) = 6/36$

### 3) Calcul de la probabilité de $A \cup B$

**Propriété 1 (cas général) : la probabilité de la réunion de deux événements est :**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemple : dans une classe, 10% des élèves jouent d'un instrument à corde, 20% des élèves jouent d'un instrument à vent et 5% des élèves jouent d'un instrument à corde et d'un instrument à vent. On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il joue d'un instrument à corde ou à vent ?

Notons  $C$  l'événement : "l'élève joue d'un instrument à corde" et  $V$  : "l'élève joue d'un instrument à vent"

D'après les données, on a :  $P(C) = 0,1$  ;  $P(V) = 0,2$  et  $P(C \cap V) = 0,05$ .

D'après la propriété 1, on obtient :  $P(C \cup V) = P(C) + P(V) - P(C \cap V) = 0,25$ .

Exercice : démontrer que si  $C$ ,  $D$  et  $E$  sont trois événements alors,

$$P(C \cup D \cup E) = P(C) + P(D) + P(E) - P(C \cap D) - P(D \cap E) - P(E \cap C) + P(C \cap D \cap E)$$

En effet :  $P(C \cup D \cup E) = P(C \cup (D \cup E)) = P(C) + P(D \cup E) - P(C \cap (D \cup E))$

$$P(C \cup D \cup E) = P(C) + P(D) + P(E) - P(D \cap E) - P((C \cap D) \cup (C \cap E))$$

$$P(C \cup D \cup E) = P(C) + P(D) + P(E) - P(D \cap E) - P(C \cap D) - P(C \cap E) + P(C \cap D \cap E)$$

**Propriété 2 (Cas particulier) : si deux événements sont incompatibles, alors la probabilité de leur union est égale à la somme de leurs probabilités :**

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset, \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Cette propriété se généralise à toute famille  $(A_n)$  d'événements incompatibles deux à deux :

Si pour tous entiers  $i$  et  $j$  distincts tels que  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n$  on a  $A_i \cap A_j = \emptyset$  alors  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

(On dit que la probabilité est additive)

**Conséquences (de la propriété 2) :**

- la probabilité de l'événement contraire  $\bar{A}$  de  $A$  est  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ . En particulier, La probabilité d'un événement impossible (par exemple : "obtenir 7 en lançant un dé") est nulle :  $P(\emptyset) = 0$ .<sup>(1)</sup>
- Si  $A \subset B$  alors  $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

Démonstrations :

Prouvons déjà la propriété 2 :

Soient  $A$  et  $B$  deux événements incompatibles. Si  $A$  ou  $B$  est vide, alors la relation est évidente. Supposons  $A \neq \emptyset$  et  $B \neq \emptyset$ . Notons  $A = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n\}$  et  $B = \{f_1 ; f_2 ; \dots ; f_m\}$  (Les  $(e_i)_{0 \leq i \leq n}$  et  $(f_j)_{0 \leq j \leq m}$  représentent des événements élémentaires).

---

<sup>(1)</sup> Réciproquement, si un événement  $E$  est tel que  $P(E) = 0$ .  $E$  est-il un événement impossible (c'est-à-dire : a-t-on nécessairement  $E = \emptyset$ ) ? Réponse : non en général ! En effet, considérons l'expérience suivante : on choisit un nombre réel compris entre 0 et 4 au hasard (en cochant par exemple un point au hasard sur le segment). L'univers est  $\Omega = [0 ; 4]$  qui est un ensemble infini non dénombrable. Soit  $E$  l'événement : "le nombre choisi est  $\pi$ ".  $E$  n'est pas impossible car  $\pi \in [0 ; 4]$  et pourtant  $P(E) = 0$ . Cependant, si  $\Omega$  est fini, on a l'équivalence entre  $E$  impossible et  $P(E) = 0$ . Par contre, si  $\Omega$  est infini, on est amené à définir : " $E$  est dit impossible lorsque  $E = \emptyset$ " et " $E$  est dit  $P$ -quasi-impossible lorsque  $P(E) = 0$ ".

D'après le principe fondamental :  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(e_i)$  et  $P(B) = \sum_{j=1}^m P(f_j)$

Mais  $A$  et  $B$  sont incompatibles, donc :

$$A \cup B = \{e_1; e_2; \dots; e_n; f_1; f_2; \dots; f_m\}$$

Donc, toujours d'après le principe fondamental :

$$P(A \cup B) = \sum_{i=1}^n P(e_i) + \sum_{j=1}^m P(f_j)$$

D'où :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Prouvons ensuite les trois conséquences :

- Par définition,  $A$  et  $\bar{A}$  sont incompatibles et  $A \cup \bar{A} = \Omega$ .

D'après la propriété 2, on a donc :  $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$

Et comme  $P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$ , il vient :  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ .

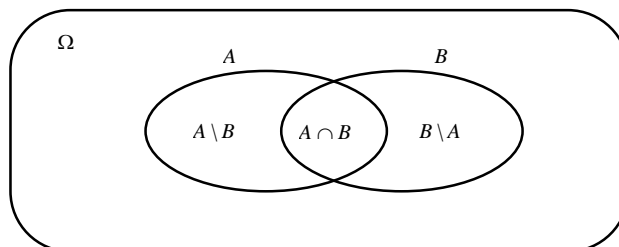
- Si  $A \subset B$  alors  $B$  est l'union disjointe de  $A$  et  $(B \setminus A)$  donc :  $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ . Et comme  $P(B \setminus A) \geq 0$ , on obtient bien :  $P(A) \leq P(B)$ .

- Ensuite, il est clair que les événements  $A \setminus B$  et  $A \cap B$  sont incompatibles et que  $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$  (voir figure ci-dessous).

D'après la propriété 2, on a donc :  $P(A) = P(A \setminus B) \cup (A \cap B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$ , d'où le résultat.

Prouvons maintenant la propriété 1 :

Il suffit d'écrire que :  $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ .



Comme les événements  $A \setminus B$  et  $B$  sont incompatibles, on a :  $P((A \setminus B) \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$

Et d'après les conséquences :  $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$

D'où le résultat.

Exercice 1 : une urne contient 3 boules rouges, 2 boules noires et 3 boules vertes. On tire une boule au hasard. Calculer les probabilités des événements  $R$ ,  $N$ ,  $V$ , et leur contraire.

$$(P(R) = 3/8; P(N) = 2/8; P(V) = 3/8; P(\bar{R}) = 5/8; P(\bar{N}) = 6/8; P(\bar{V}) = 5/8)$$

Calculer  $P(R \cup V)$ .

$$(P(R \cup V) = P(R) + P(V) = 6/8)$$

Exercice 2 : le jeu de 32 cartes. On en choisit une au hasard. On note :

$R$  = "tirer un roi"

$T$  = "tirer un trèfle"

$RT$  = "tirer le roi de trèfle"

Calculer  $P(R)$  ;  $P(T)$  ;  $P(RT)$  ;  $P(R \cup T)$

$$(P(R) = 4/32; P(T) = 8/32; P(RT) = 1/32; P(R \cup T) = 11/32)$$

Exercice 3 : dans une famille de cinq enfants, quelle est la probabilité qu'il y ait plus de filles que de garçons ?

Notons :  $F$  = "il y a plus de filles que de garçons" et  $G$  = "il y a plus de garçons que de filles".

Pour des raisons évidentes de symétrie, on a  $P(F) = P(G)$ . En outre, il est clair que  $F \cap G = \emptyset$  et que  $F \cup G = \Omega$  (il y a 5 enfants, il ne peut pas avoir autant de filles que de garçons ; on a en fait dans ce cas précis  $G = \bar{F}$ ).

D'où  $P(F \cup G) = P(F) + P(G) = 1$  et, par suite,  $P(F) = \frac{1}{2}$ .

Exercice 4 : démontrer que la réciproque de la propriété 2 est vraie, à savoir :

**Si  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  alors  $A$  et  $B$  sont incompatibles**

(Si  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  alors  $P(A \cap B) = 0$  donc ( $\Omega$  étant fini)  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A$  et  $B$  sont incompatibles)<sup>(1)</sup>

Résolution de l'exercice de motivation :

Considérons l'expérience aléatoire suivante : choisir au hasard une famille de deux enfants et regarder si ce sont des garçons ou des filles. L'univers associé comporte 4 issues possibles :  $\Omega = \{FF, FG, GF, GG\}$  où, par exemple,  $FG$  est l'événement "l'aînée est une fille, le cadet est un garçon". Statistiquement, on peut considérer ces quatre événements comme équiprobables.

Dans notre situation, l'expérience est modifiée puisque l'on sait qu'il y a au moins un garçon parmi les deux enfants. L'univers est alors  $\Omega' = \{FG, GF, GG\}$ . Il est constitué de trois événements élémentaires équiprobables.

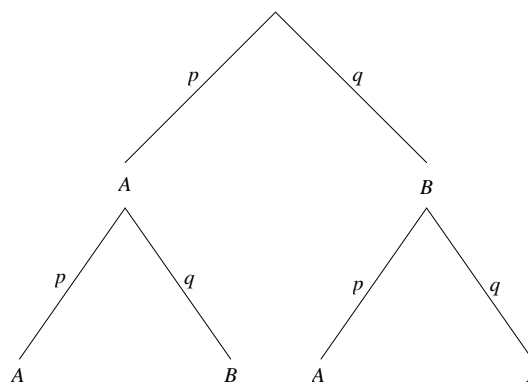
Nous avons donc  $P(GG) = \frac{1}{3}$  ...

### III) Arbres

Voici trois règles pratiques pour calculer des probabilités directement sur des arbres (règles qui sont en relation avec des résultats du cours ci-dessus) :

Exemple de situation où l'on réitère deux fois une expérience comportant deux issues  $A$  et  $B$  de probabilités respectives  $p$  et  $q$ . L'univers associé à cette situation comporte 4 issues :

$$\Omega = \{AA ; AB ; BA ; BB\}$$



**R1** : la somme des probabilités des branches partant d'une même racine est toujours égale à 1 :

Exemple : 
$$p + q = 1$$

**R2** : la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches de ce chemin :

Exemple : la probabilité du chemin  $AB$  est : 
$$pq$$

**R3** : la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins correspondant à cet événement.

Exemple : La probabilité de l'événement "obtenir exactement une fois  $A$ " est : 
$$2pq$$

<sup>(1)</sup> Attention ! Cette réciproque est fautive lorsque  $\Omega$  n'est pas fini. Considérons l'expérience suivante : on choisit un nombre réel au hasard dans  $\Omega = [0 ; 100]$ . Notons  $A$  = "le nombre choisi est dans  $[60 ; 70]$ " et  $B$  = "le nombre choisi est dans  $[70 ; 80]$ ". Avec l'hypothèse d'uniformité du choix, on a :  $P(A) = P(B) = 0,1$  et  $P(A \cup B) = 0,2$ . On a bien la relation  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  et pourtant  $A \cap B = \{70\} \neq \emptyset$  donc  $A$  et  $B$  ne sont pas incompatibles.

Applications :

- On lance un dé. Si le résultat est pair on tire un jeton d'une urne contenant 3 jetons (numérotés 1, 2 et 3).  
Quelle est la probabilité que la somme *dé + jeton éventuel* soit égale à 5 ?
- Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules blanches. On tire des boules de l'urne (sans remise) jusqu'à obtention d'une boule rouge. Quelle est la probabilité d'obtenir les 3 boules blanches ?
- Le lièvre et la tortue : on lance un dé. Si le 6 sort, le lièvre gagne, sinon la tortue avance d'une case. On continue jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant en suivant les cases ci-dessous. Quelle est la situation la plus enviable : celle du lièvre ou de la tortue ?

