

# TRIGONOMETRIE ET FONCTIONS CIRCULAIRES

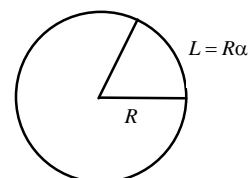
## I) Le radian

Le radian est une unité de mesure des angles choisie de façon que l'angle plat ( $180^\circ$ ) mesure  $\pi$  radians.

Ainsi, un arc de cercle de rayon  $R$  et d'angle  $\alpha$  (en radians) a pour longueur :  $L = \alpha R$

Le tableau de proportionnalité ci-dessous permet de convertir un angle de  $x$  degrés en un angle de  $\alpha$  radians (ou inversement).

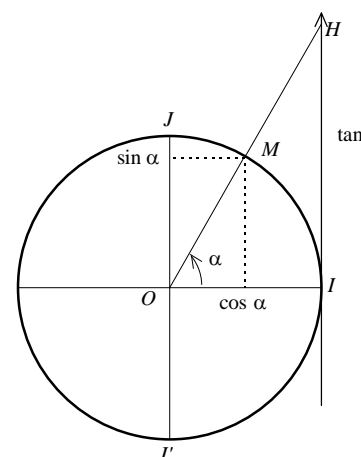
degrés	180	$x$
radians	$\pi$	$\alpha$



Exemple : convertir  $60^\circ$  en radians : cela donne  $\alpha = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$  rad.

## II) Cercle trigonométrique et définition du sinus, du cosinus et de la tangente

Munissons le plan d'un repère orthonormé  $(O ; I, J)$ . Le cercle trigonométrique est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 orienté dans le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre). Soit  $M$  un point du cercle tel que  $\alpha$  soit une mesure, en radians, de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ .



### Définition du sinus et du cosinus :

On appelle **cosinus** et **sinus** de  $\alpha$ , et on note  $\cos \alpha$  et  $\sin \alpha$ , les coordonnées du point

$M$  dans le repère  $(O ; I, J)$  :  $\overrightarrow{OM} = (\cos \alpha) \overrightarrow{OI} + (\sin \alpha) \overrightarrow{OJ}$ .

### Définition de la tangente :

Soit  $\Delta$  la droite (verticale) d'équation  $x = 1$  dans le repère  $(O ; I, J)$  et  $H$  le point défini par  $(OM) \cap \Delta$ .

Ce point  $H$  existe dès lors que  $\Delta$  et  $(OM)$  ne sont pas parallèles, c'est-à-dire dès que  $M$  n'est ni en  $J(0 ; 1)$ , ni en

$J'(0 ; -1)$ , c'est-à-dire dès que  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

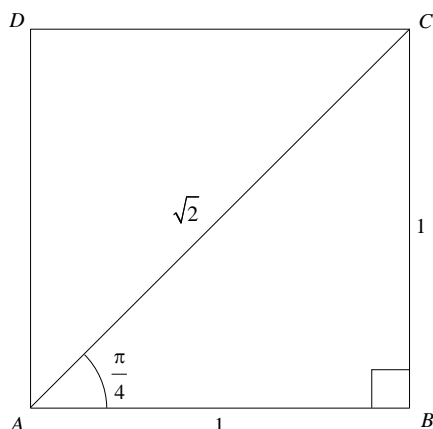
On appelle **tangente** de  $\alpha$ , et on note  $\tan \alpha$ , l'ordonnée du point  $H$  dans le repère  $(O ; I, J)$

Le tableau ci-dessous rappelle les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente pour des valeurs particulières de l'angle  $\alpha$  (en radians) :

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin $\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos $\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan $\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	NON DÉFINIE !

Démonstration :

Pour calculer les valeurs de  $\sin \frac{\pi}{4}$  et  $\cos \frac{\pi}{4}$ , on exploite la diagonale du carré (de côté 1) :



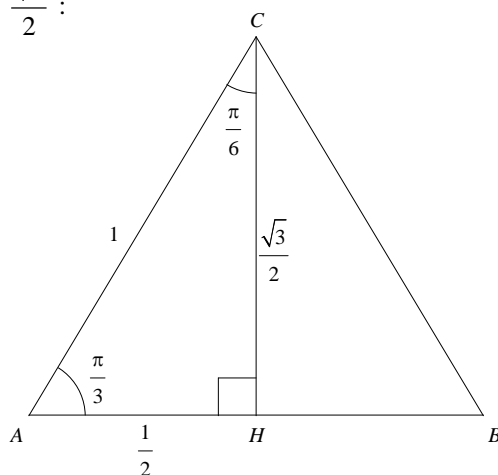
Dans le triangle  $ABC$  rectangle en  $B$ , on a :  $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{BC}{AB} = 1$$

Pour calculer les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente de  $\frac{\pi}{3}$  et  $\frac{\pi}{6}$ , on exploite naturellement la configuration du triangle équilatéral de côté 1 avec une de ses hauteurs qui au passage d'après le théorème de

Pythagore mesure  $\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  :



Dans le triangle  $AHC$  rectangle en  $H$ , on a :

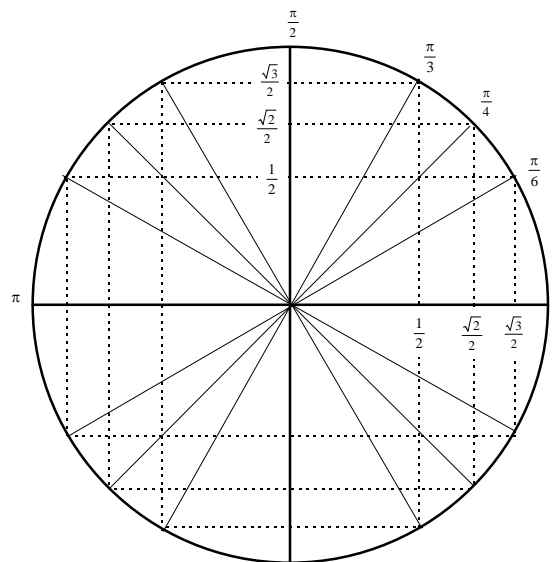
$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} ; \cos \frac{\pi}{6} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \tan \frac{\pi}{6} = \frac{AH}{CH} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \cos \frac{\pi}{3} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} ; \tan \frac{\pi}{3} = \frac{CH}{AH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Pour les autres cas d'angles remarquables, on retrouve les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente par symétrie comme l'illustre le cercle<sup>(1)</sup> ci-dessous :

**Propriétés élémentaires du sinus et du cosinus :**

$$\begin{aligned} \cos(x + 2k\pi) &= \cos x \\ \sin(x + 2k\pi) &= \sin x \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ -1 &\leq \cos x \leq 1 \\ -1 &\leq \sin x \leq 1 \end{aligned}$$



Exercice : sachant que  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ , calculer la valeur exacte de  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

C'est un exercice qui n'est pas si simple ! Déjà, nous disposons d'une relation entre le sinus et le cosinus :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

En particulier, avec  $x = \frac{\pi}{12}$  :  $\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1$

Calculons  $\cos^2 \frac{\pi}{12}$  :  $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \left( \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{6 + 2\sqrt{12} + 2}{16} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

D'où :  $\sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

(Remarque :  $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$  est bien un nombre positif puisque  $2 > \sqrt{3}$  )

Tenant compte de la relation  $\sqrt{A^2} = |A|$ , nous obtenons :

$$\left| \sin \frac{\pi}{12} \right| = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$

Or,  $\sin \frac{\pi}{12} \geq 0$  car  $\frac{\pi}{12} \in [0 ; \pi]$ . Donc :  $\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$

Enfin, n'y a-t-il pas une écriture plus simple ?

Dans ce cas, oui ! En effet :  $4 - 2\sqrt{3} = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = (1 - \sqrt{3})^2$

Donc :  $2 - \sqrt{3} = \frac{(1 - \sqrt{3})^2}{2}$

Et  $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{|1 - \sqrt{3}|}{2\sqrt{2}}$

Et comme  $\sqrt{3} > 1$  :  $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

<sup>(1)</sup> Pour un cercle trigonométrique complet, voir : [http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/Lycees\\_fichiers/CoursP\\_fichiers/cercle.pdf](http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/Lycees_fichiers/CoursP_fichiers/cercle.pdf)

### III) Fonctions sinus et cosinus

**Rappel** : une fonction  $f$  est dite périodique, de période  $T$  si pour tout réel  $x$  on a :  $f(x + T) = f(x)$ .

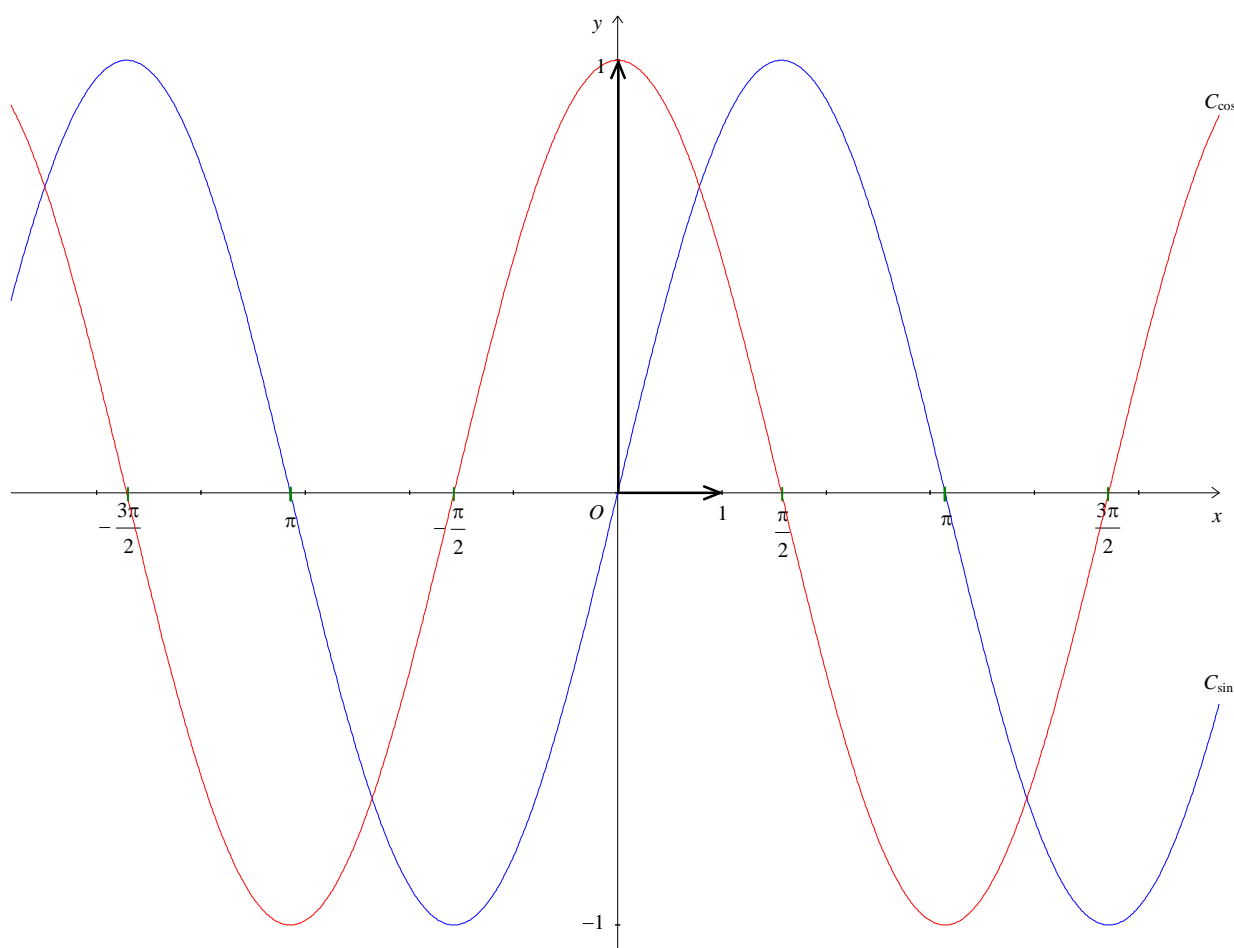
Notons que si  $T$  est une période, tout multiple de  $T$  en est une autre :

$$\dots = f(x + 2T) = f(x + T) = f(x) = f(x - T) = f(x - 2T) = \dots$$

Pour étudier (ou tracer) une fonction périodique, on se limite à une période.

**Théorème** : Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période  $2\pi$ . De plus, la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire ( $\cos(-x) = \cos x$  et  $\sin(-x) = -\sin x$ )

Représentation graphique des fonctions sinus et cosinus :

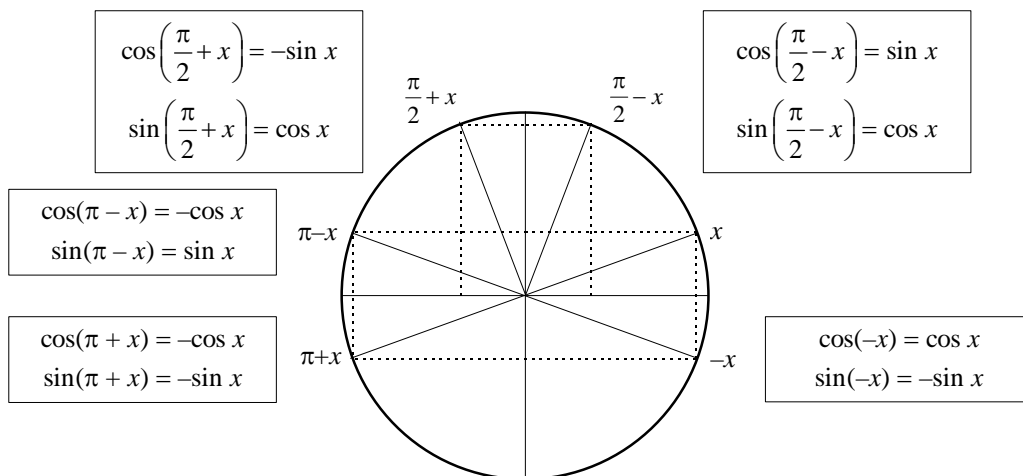


*Les courbes ci-dessus sont appelées des sinusôides.*

**Exercice** : dresser le tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle  $[-\pi ; \pi]$ , et le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle  $[0 ; \pi]$ .

#### IV) Relations entre le sinus et le cosinus

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver<sup>(1)</sup> les relations suivantes :



Exercice : simplifier les expressions suivantes :  $\cos(-\pi - x)$  ;  $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  ;  $\cos^2(-x) + \sin^2(\pi - x)$

#### V) Fonction tangente

Soit  $x$  un réel tel que  $\cos x \neq 0$ . On appelle tangente de  $x$  le réel noté **tan**  $x$  et défini par  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

De ce fait,  $\tan x$  est définie lorsque  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  (où  $k$  est un entier relatif).

Exercice 1 : Calculer  $\tan x$  pour  $x = \frac{5\pi}{6}$  ;  $\frac{3\pi}{4}$  ;  $\frac{\pi}{12}$ . (Voir ci-dessus pour les valeurs de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ )

Exercice 2 : Soit  $x$  un réel de l'intervalle  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$  tel que  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Calculer  $\cos x$  et  $\tan x$ .

#### VI) Fonctions dérivées des fonctions circulaires

Fonction	Dérivée
$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\omega \cos(\omega t + \varphi)$

Fonction	Dérivée
$\cos(\omega t + \varphi)$	$-\omega \sin(\omega t + \varphi)$
$\tan t$	$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$

Exercice 1 : en utilisant la formule de la dérivée d'un quotient, démontrer le résultat ci-dessus concernant la dérivée de la fonction tangente.

Exercice 2 : dériver les fonctions suivantes :  $f(x) = \sin 2x$  ;  $g(x) = 2 \sin x \cos x$  ;  $h(x) = \sin^2 x$

<sup>(1)</sup> Pour une démonstration, voir ce document : [http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/Lyce\\_e\\_fichiers/CoursP\\_fichiers/relametr.pdf](http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/Lyce_e_fichiers/CoursP_fichiers/relametr.pdf)

## VII) Formulaire de trigonométrie<sup>(1)</sup>

### Formules d'addition

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

### Formules de duplication

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

### Formules de linéarisation

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Exercice 1 : calculer  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$  à l'aide de l'égalité  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$  et des formules d'addition.

Exercice 2 : calculer  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\sin \frac{\pi}{8}$  à l'aide des formules de linéarisation.

## VIII) Résolution des équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ ( $x \in \mathbb{R}$ )

Si  $a \notin [-1 ; 1]$  alors ces équations n'ont pas de solutions (car  $-1 \leq \cos x \leq 1$  et  $-1 \leq \sin x \leq 1$ )

Si  $a \in [-1 ; 1]$ , elles en ont une infinité :

Pour  $\cos x = a$  : on résout déjà l'équation sur l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$  en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles  $\alpha$  et  $-\alpha$  dont le cosinus vaut  $a$ . On trouve les autres solutions de l'équation en ajoutant les multiples de  $2\pi$ .

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Pour  $\sin x = a$  : on résout déjà l'équation sur l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$  en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles  $\alpha$  et  $\pi - \alpha$  dont le sinus vaut  $a$ . On trouve les autres solutions de l'équation en ajoutant les multiples de  $2\pi$ .

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Exercice : Résoudre les équations suivantes :

$$\cos x = -0,5 \text{ pour } x \in \mathbb{R} ; \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ pour } x \in \mathbb{R} ; 2\sin(3x) = 1 \text{ pour } x \in [0 ; 6\pi].$$

<sup>(1)</sup> Pour une démonstration, voir ce document : [http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/Lycees\\_fichiers/CoursP\\_fichiers/relametr.pdf](http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/Lycees_fichiers/CoursP_fichiers/relametr.pdf)

## IX) Coordonnées polaires

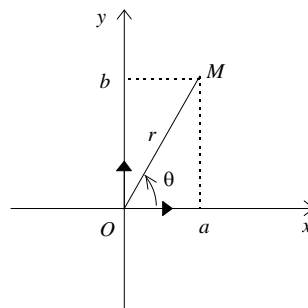
Soit  $M$  un point du plan représenté par des coordonnées  $(a, b)$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Les coordonnées  $(a, b)$  sont dites cartésiennes ou rectangulaires.

Supposons  $M \neq O$  et notons  $r$  la distance  $OM$  et  $\theta$  l'angle  $(\vec{i}, \overline{OM})$ .

Le couple  $[r, \theta]$  est appelé couple de coordonnées polaires du point  $M$ .

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 + b^2 \\ a &= r \cos \theta \\ b &= r \sin \theta \end{aligned}$$



Les relations ci-dessus permettent de convertir les coordonnées polaires en cartésiennes et vice-versa.

Exemples :

1. Soit  $M \left[ 2 ; \frac{\pi}{3} \right]$ . Déterminer les coordonnées cartésiennes  $(a, b)$  de  $M$  :

$$a = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$b = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Les coordonnées cartésiennes de  $M$  sont :  $(1; \sqrt{3})$

2. Soit  $N(2; -2)$ . Déterminer les coordonnées polaires  $[r, \theta]$  de  $N$  :

$$r^2 = a^2 + b^2 = 8$$

Et comme  $r > 0$  :

$$r = 2\sqrt{2}$$

D'où :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{b}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Par lecture du cercle trigonométrique, on a :  $\theta = -\frac{\pi}{4}$

D'où :  $N \left[ 2\sqrt{2} ; -\frac{\pi}{4} \right]$