TRIGONOMÉTRIE ET FONCTIONS CIRCULAIRES

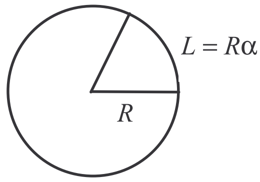
I) Le radian

Le radian est une unité de mesure des angles choisie de façon que l'angle plat (180°) mesure π radians.

Ainsi, un arc de cercle de rayon R et d'angle α (en radians) a pour longueur : $L = \alpha R$

Le tableau de proportionnalité ci-dessous permet de convertir un angle de x degrés en un angle de α radians (ou inversement).

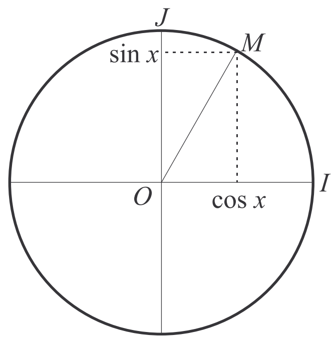
degrés	180	x
radians	π	α



Exemple : convertir 60° en radians :

II) Cercle trigonométrique et définition du sinus et du cosinus

Munissons le plan d'un repère orthonormé (O ; I, J). Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre). Soit M un point du cercle tel que x soit une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$.

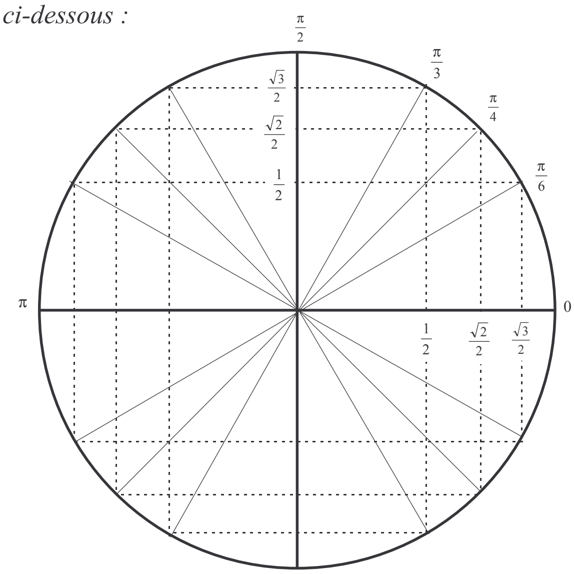


Définition : on appelle cosinus et sinus de x, et on note $\cos x$ et $\sin x$ les coordonnées du point M dans le repère (O ; I, J) : $\overrightarrow{OM} = (\cos x)\overrightarrow{OI} + (\sin x)\overrightarrow{OJ}$

Le tableau ci-dessous rappelle les valeurs du sinus et du cosinus pour des valeurs particulières de l'angle x :

x (en rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Ce tableau s'illustre par le cercle ci-dessous :



Propriétés élémentaires du sinus et du cosinus :

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

Exercice : sachant que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$.

III) Fonctions sinus et cosinus

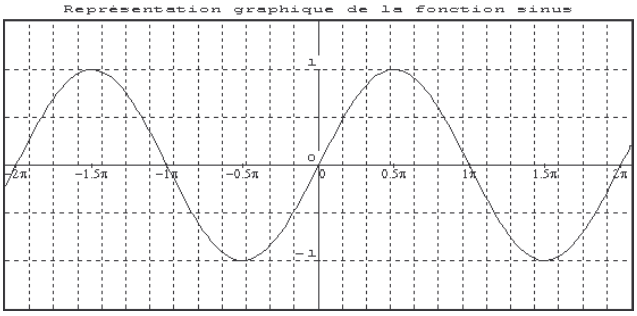
Rappel : une fonction f est dite périodique, de période T si pour tout réel x on a : $f(x + T) = f(x)$.

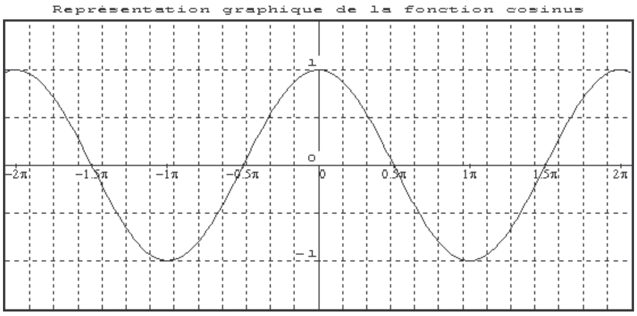
Notons que si T est une période, tout multiple de T en est une autre :

$$... = f(x + 2T) = f(x + T) = f(x) = f(x - T) = f(x - 2T) = ...$$

Pour étudier (ou tracer) une fonction périodique, on se limite à une période.

Théorème : les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π. De plus, la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.





Les courbes ci-dessus sont appelées des sinusoïdes.

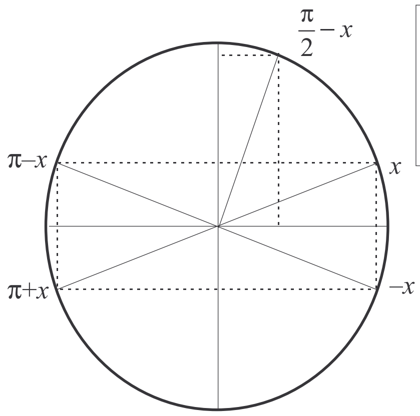
Exercice : dresser le tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, et le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

IV) Angles associés

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$



$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\sin(-x) = -\sin x$

Exercice : simplifier les expressions suivantes : $\cos(-\pi - x)$; $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; $\cos^2(-x) + \sin^2(\pi - x)$

V) **Fonction tangente**

Soit x un réel tel que $\cos x \neq 0$. On appelle tangente de x le réel noté **tan** x et défini par : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

De ce fait, $\tan x$ est définie lorsque $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (où k est un entier relatif).

Exercice 1 : Calculer $\tan x$ pour $x = \dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 2 : Soit x un réel de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right]$ tel que $\sin x = \dfrac{3}{5}$.

Calculer $\cos x$ et $\tan x$.