

## UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE THALÈS PAR UN CALCUL D'AIRES

### Lemme

$ABCD$  est un trapèze, non croisé, avec  $(AB) \parallel (DC)$ .

On note  $I = (AC) \cap (BD)$ .

Alors :  $\text{Aire}(AID) = \text{Aire}(BIC)$

### Démonstration

Les triangles  $ACD$  et  $BDC$  ont une base commune (à savoir  $[DC]$ ) et la même hauteur associée (à savoir la hauteur du trapèze). En conséquence :

$$\text{Aire}(ACD) = \text{Aire}(BDC)$$

Or, les triangles  $AID$  et  $DIC$  partitionnent le triangle  $ACD$ . Nous pouvons donc écrire :

$$\text{Aire}(ACD) = \text{Aire}(AID) + \text{Aire}(DIC)$$

De même, on a :  $\text{Aire}(BDC) = \text{Aire}(BIC) + \text{Aire}(DIC)$

En soustrayant membre à membre ces deux égalités, nous obtenons :

$$\text{Aire}(AID) = \text{Aire}(BIC)$$

### Théorème de Thalès

On donne :

- deux droites  $d$  et  $d'$ , sécantes en  $O$
- $A$  et  $D$  deux points de  $d$  distincts de  $O$
- $B$  et  $C$  deux points de  $d'$  distincts de  $O$

Si  $(AB)$  et  $(DC)$  sont parallèles, alors :  $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{DC}$

### Démonstration

Notons  $h$  la hauteur issue de  $B$  dans le triangle  $OAB$ .

$$\text{Aire}(OAB) = \frac{1}{2} \times OA \times h$$

$$\text{Aire}(ODB) = \frac{1}{2} \times OD \times h$$

D'où :

$$\frac{OA}{OD} = \frac{\text{Aire}(OAB)}{\text{Aire}(ODB)}$$

Notons  $k$  la hauteur issue de  $A$  dans le triangle  $OAB$ .

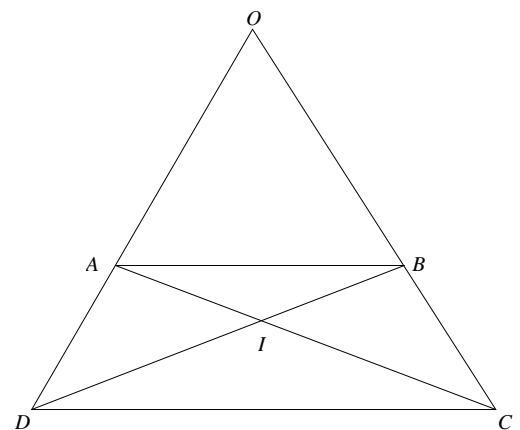
$$\text{Aire}(OAB) = \frac{1}{2} \times OB \times k$$

$$\text{Aire}(OAC) = \frac{1}{2} \times OC \times k$$

D'où :

$$\frac{OB}{OC} = \frac{\text{Aire}(OAB)}{\text{Aire}(OAC)}$$

Or :  $\text{Aire}(ODB) = \text{Aire}(AID) + \text{Aire}(OAIB) \stackrel{\text{lemme}}{=} \text{Aire}(BIC) + \text{Aire}(OAIB) = \text{Aire}(OAC)$



D'où :  $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC}$

Prouvons maintenant la dernière égalité.

Soit  $E$  le projeté de  $A$  sur  $(CD)$  parallèlement à  $(OC)$ .

D'après ce qu'on vient de prouver, on peut écrire :

$$\frac{DE}{DC} = \frac{DA}{DO}$$
$$\frac{DC - EC}{DC} = \frac{DO - AO}{DO}$$
$$\frac{EC}{DC} = \frac{AO}{DO}$$

Et comme  $ABCE$  est un parallélogramme :

$$\frac{AB}{DC} = \frac{OA}{OD}$$

