La duplication du sinus

Le but de cette activité est de chercher une expression de sin(2x) en fonction de sin x et cos x. La présence ici d'un angle double (2x) nous conduira à utiliser le théorème de l'angle au centre (qui est égal au double de l'angle inscrit qui intercepte le même arc - voir la question 2).

$\sin(2x) = ?$

1. *Recherche d'une conjecture*

   Un élève pense : "c'est facile, $\sin(2x)$ c'est comme $2 \sin x$" !

   Si c'était le cas, le rapport $\dfrac{\sin(2x)}{2\sin x}$ serait égal à 1 (pour x non multiple de π).

   Afin d'étudier le comportement de ce rapport, compléter le tableau suivant :

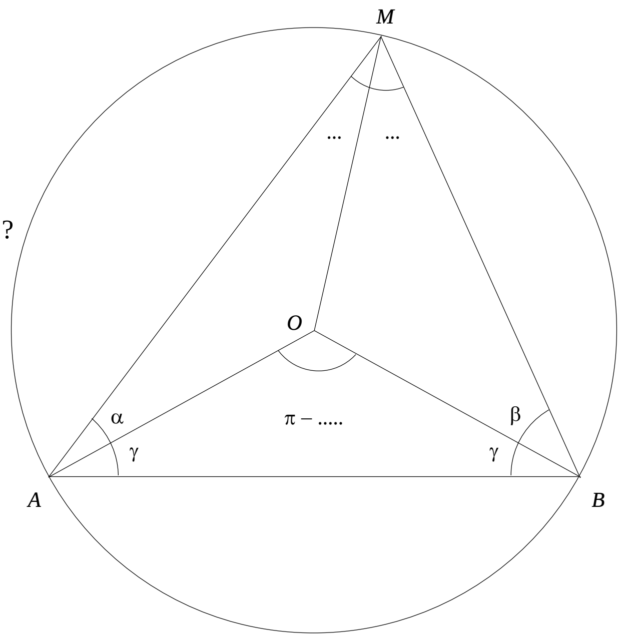
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(2x)$						
$2 \sin x$						
$\dfrac{\sin(2x)}{2\sin x}$						

   La conjecture émise par l'élève est-elle bonne ?

   À l'aide des informations contenues dans ce tableau, émettre une autre conjecture :

   $\sin(2x) =$ ....

Nous allons maintenant démontrer cette relation. Pour ça nous aurons besoin du théorème suivant :



2. *Le théorème de **l'angle au centre**.*

   On considère un cercle de centre O.

   M, A et B sont trois points de ce cercle ($A \neq B$)

   a. Quelle est la nature des triangles OAB, OMA et OBM ?

   b. On note α l'angle en A dans OAM, β l'angle en B dans OBM et γ l'angle en A dans OAB. Compléter la figure avec les angles manquants.

   c. Donner une mesure de l'angle $2\alpha + 2\beta + 2\gamma$.

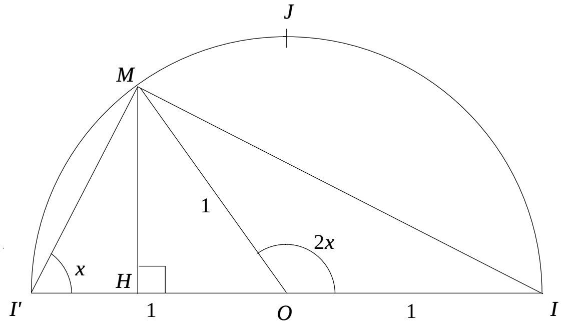
   d. En déduire qu'une mesure de l'angle en O dans AOB (angle au centre) est le double de l'angle en M dans AMB (angle inscrit).

3. *La démonstration géométrique sur l'intervalle [0 ; π/2].*

   Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique (donc de rayon 1) de centre O.

   Soit x un réel de $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et M le point du cercle trigonométrique associé à l'angle $2x$ (en radians).

   On note H le projeté orthogonal de M sur le segment $[II']$ (voir figure ci-dessous)



   a. Démontrer que $MI = 2 \sin x$. Exprimer, de même, MI' en fonction de x. Est-il vrai que $MH = \sin(2x)$?

   b. En calculant de deux manières différentes l'aire du triangle IMI', montrer que :

   $$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

   pour tout réel x de $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

4. *La généralisation à $\mathbb{R}$.*

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(2x) - 2 \sin x \cos x$

   a. Montrer que f est impaire et périodique[(1)] de période π.

   b. Déduire des résultats précédents que $f(x) = 0$ pour tout réel x, et donc que :

   $$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \text{ pour tout réel } x.$$

(*Noter comment les propriétés des fonctions (parité, périodicité) permettent d'étendre à $\mathbb{R}$ un résultat trigonométrique obtenu seulement sur [0 ; π/2].)*

5. *Question de recherche*

   Démontrer que pour tout réel x : $\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$

[(1)] On dit qu'une fonction f est périodique (sur $\mathbb{R}$) lorsqu'il existe un réel T tel que pour tout réel x : $f(x + T) = f(x)$.