ÉQUATIONS et INÉQUATIONS

1. Équations

1) Vocabulaire

- *Une* <u>*équation*</u> *est une égalité dans laquelle figure une quantité inconnue (ou plusieurs). On désigne cette quantité inconnue par des lettres (x, y, ...).*

  <u>Exemples d'équations</u> :

  Remarque : ne pas confondre une équation (comme par exemple $2x + 3 = 0$) et une expression algébrique (comme par exemple $2x + 3$). Une expression algébrique ne contient pas le signe égal.

- *Une* <u>*solution*</u> *de l'équation, c'est une valeur que prend la (ou les) quantité(s) inconnue(s) pour laquelle l'égalité est vérifiée.*

  <u>Exemples</u> :

  i) On considère l'équation suivante : $x^2 + 1 = 3 - x$

  La valeur 3 est-elle une solution de l'équation ?

  La valeur 1 est-elle une solution de l'équation ?

  ii) On considère l'équation suivante : $2x + y = 0$ (Équation à deux inconnues x et y)

  Le couple $(x, y) = (1 ; 2)$ est-il solution de l'équation ? Et le couple $(1 ; -2)$?

  Trouver mentalement un autre couple solution :

  iii) On considère l'équation suivante : $(x - 2)^2 = 25$

  Trouver mentalement une solution de cette équation :

  Est-ce la seule ?

- <u>*Résoudre*</u> *une équation, c'est trouver* ***toutes*** *ses solutions. (Il se peut qu'il n'y en ait pas, ou au contraire qu'il y en ait plusieurs, voire une infinité.)*

  On ne pourra donc pas procéder, à tatons, comme ci-dessus mais suivre un certain nombre de règles de calcul (qui vont être précisées au cours de ce document). La première chose à maîtriser parfaitement est la résolution des équations du type $ax + b$. Ceci a déjà vu au collège. On peut, à ce niveau, préciser que l'ensemble des solutions dépend de l'ensemble dans lequel on résout l'équation. Redonnons quelques exemples :

  i) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x - 1 = 0$:

  $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels
  $\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels

  ii) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $2x - 1 = 0$:

2) Équations du type $ax + b = 0$ ou s'y ramenant

Dans ce paragraphe, on suppose que les quantités a et b sont des nombres réels.

Résoudre : $2x + 6 = 0$	Résoudre : $3x - 2 = 6x + 4$
Résoudre : $2(x + 4) = 3x - (5 + x)$	Résoudre : $2(x - 2) + 5x = 8x - 2 - (x + 2)$

Résolution (dans $\mathbb{R}$) de l'équation $\boldsymbol{ax + b = 0}$ dans le cas général :

- Si $a \neq 0$, alors l'équation a une **unique solution** : $x =$
- Si $a = 0$, alors il y a 2 cas :

  – Si $b = 0$, alors on a $0x + 0 = 0$, ce qui est vérifié pour toute valeur de x donc :

  – Si $b \neq 0$, alors on a $0x + \text{b} = 0$. Cette égalité n'est jamais vérifiée donc :

Définition : On appelle équation du premier degré, une équation du type $ax + b = 0$ où $a \neq 0$.

*Théorème : Une équation du premier degré possède **une et une seule solution réelle**.*

Exercice 1 : trouver quatre entiers consécutifs dont la somme est égale à 2006 :

Exercice 2 : refaire l'exercice précédent en remplaçant 2006 par 2007 :

3) Equations "produits"

Exemple : une équation du type $(3x + 1)(x - 5) = 0$ est une équation produit.

Théorème : Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

Exercice : résoudre l'équation suivante : $(x + 1)x(x - 1) = 0$

Problème : comment résoudre les équations suivantes ?

$(2x - 1)^2 + x(1 - 2x) = 4x^2 - 1$	$(3x + 5)^2 = (x + 1)^2$

Méthode à retenir :

Pour se ramener à une équation produit, il faut d'abord tout regrouper dans un même membre et puis

....

Stratégies de factorisation : faire apparaître un **facteur commun** ou utiliser une **égalité remarquable**.

Attention de ne pas perdre des solutions !

Résoudre l'équation $2x(x - 1) = (x + 3)(x - 1)$:

Et lorsque l'inconnue figure au dénominateur ?

Résoudre $\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$; $\frac{3}{x^2 - 9} = \frac{1}{x-3}$; $\frac{x^2}{x} = 0$

Démarche à suivre dans ce cas de figure :
– préciser les contraintes sur l'inconnue
– "chasser" l'inconnue des dénominateurs
– résoudre l'équation obtenue
– confronter les solutions aux contraintes

2. Inéquations

1) Vocabulaire

- *une* *<u>inéquation</u>* *est une inégalité dans laquelle figure une quantité inconnue (ou plusieurs). On désigne cette quantité inconnue par des lettres (x, y, ...).*

  <u>Exemples d'inéquations</u> :

- *Une* *<u>solution</u>* *de l'inéquation, c'est une valeur que prend la quantité inconnue pour laquelle l'inégalité est vérifiée.*

  <u>Exemples</u> :

  i) On considère l'inéquation suivante : $x^2 - 1 \geqslant 3$

  La valeur 3 est-elle une solution de l'inéquation ?

  La valeur 1 est-elle une solution de l'inéquation ?

  ii) On considère l'inéquation suivante : $x^2 \leqslant x$

  Trouver mentalement, une solution de cette inéquation :

  Est-ce la seule ?

- *<u>Résoudre</u>* *une inéquation, c'est trouver* ***toutes*** *ses solutions.*

  Comme pour les équations, la résolution des inéquations doit faire l'objet de règles précises. Le préalable est de savoir étudier le signe d'une expression de la forme $ax + b$. Pour les inéquations plus compliquées, on cherchera à les factoriser pour se ramener à l'étude, via un tableau, du signe de plusieurs expressions de la forme $ax + b$.

  Remarque : en général, l'ensemble des solutions d'une inéquation est constitué d'intervalles.

2) Signe de $ax + b$

<u>Exemple</u> : pour quelles valeurs de x, l'expression $2x + 1$ est-elle positive ? Et négative ?

En résumé, plaçons toutes ces informations dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x + 1$		$-$	0	$+$	

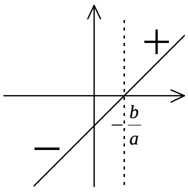
Par exemple, les solutions de l'inéquation $2x + 1 \geqslant 0$ sont les nombres de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Refaire de même chose avec, cette fois, l'expression $-3x + 2$.

$\boxed{\text{Méthode générale}}$ Si a est strictement positif, alors :

$$ax + b \geqslant 0 \iff ax \geqslant -b \overset{a>0}{\iff} x \geqslant -\frac{b}{a}$$

La fonction affine $x \mapsto ax + b$ est croissante

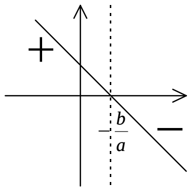


x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax + b$	–	0	+

Si a est strictement négatif, alors :

$$ax + b \geqslant 0 \iff ax \geqslant -b \overset{a<0}{\iff} x \leqslant -\frac{b}{a}$$

La fonction affine $x \mapsto ax + b$ est décroissante



x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax + b$	+	0	–

3) <u>Signe d'un produit de facteurs</u>

<u>Exemple</u> : étudier le signe de $P(x) = (2x + 1)(-x + 2)$

On étudie le signe de chaque facteur :

$$2x + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{1}{2} \qquad\qquad -x + 2 \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$$

On place ces informations dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-0{,}5$		2		$+\infty$
Signe de $2x + 1$		–	0	+		+	
Signe de $-x + 2$		+		+	0	–	
Signe de $(2x + 1)(-x + 2)$		–	0	+	0	–	

Par exemple, l'ensemble des solutions de l'inéquation $(2x + 1)(-x + 2) < 0$ est $S = \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]2 ; +\infty\right[$.

<u>Remarque</u> : dans certains cas, il est inutile de faire un tableau de signes. Par exemple, considérons l'inéquation :

$$(x^2 + 4)(x - 3) \leqslant 0$$

On constate ici que le premier facteur $x^2 + 4$ est toujours positif, l'inéquation est donc équivalente à :

$$x - 3 \leqslant 0$$

D'où $x \leqslant 3$: $S =]-\infty ; 3]$

4) **Signe d'un quotient**

Exemple : résoudre l'inéquation : $\dfrac{3-x}{2x-1} \leqslant 0$

Contrainte : $2x - 1 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq \dfrac{1}{2}$.

Étude du signe du numérateur et du dénominateur :

$$3 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 3 \qquad\qquad 2x - 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{1}{2}$$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$0{,}5$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x-1$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$\dfrac{3-x}{2x-1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Conclusion : $S = \left]-\infty ; \dfrac{1}{2}\right[\cup [3 ; +\infty[$