Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + x + 3$$

1. Calculer l'image de 0, l'image de 1 et l'image de $\sqrt{2}$.
2. Déterminer le (ou les) antécédent(s) de 3 par f.

Exercice 2

1. La question a) ci-dessous est utile pour résoudre l'équation de la question b).
   a) Développer $(x-1)^2(x+2)$.
   b) Résoudre l'équation $x^3 - 3x + 2 = 0$.
2. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 3x - 2$$

   a) Tracer soigneusement les représentations graphiques C_f et C_g de f et g sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.
   b) Déterminer graphiquement les coordonnées des points communs de C_f et C_g.
3. À l'aide de la question 1), retrouver ce résultat par calcul.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 1$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $\quad f(x) = \dfrac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que f est une fonction positive sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la parité de la fonction f.
4. Tracer soigneusement la représentation graphique C_f de la fonction f. (On se limitera à l'intervalle $[-3 ; 3]$)
5. Donner par lecture graphique la valeur du maximum de la fonction f sur :
   a) l'intervalle $[-1 ; 1]$
   b) l'intervalle $[-2 ; 1]$
6. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 1$.

Exercice 4

On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = x^3 - 3x \qquad h(x) = x - 3$$

1. Compléter les cases blanches du tableau suivant :

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$f(x)$			4	1.75								1.75	4
$g(x)$	-2	1.12							2				
$h(x)$	-5												1

2. Tracer, dans un même repère les représentation graphique C_f, C_g et C_h des fonctions f, g et h sur $[-2 ; 4]$.
   Conseils :
   a) on graduera l'axe des abscisses de -2 à 4 en prenant 2 cm par unité
   b) on graduera l'axe des ordonnées de -5 à 5 en prenant 1 cm par unités
   c) utiliser des couleurs différentes !
3. À l'aide des graphiques, déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_h.
4. Comparaison des fonctions f et g
   a) À l'aide du graphique, essayer de répondre aux questions suivantes :
      i) Combien y a-t-il de points d'intersections entre C_f et C_g ?
      ii) Quelles sont leurs coordonnées ?
   b) Pour avoir plus de précision, on se propose de retrouver ces résultats par calcul :
      i) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
      ii) En déduire, par calcul, les coordonnées des points A et B d'intersection entre C_f et C_g.
   c) Sur quel(s) intervalle(s) a-t-on $f \leqslant g$? (Méthode libre)

Exercice 5

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = x(x-2)$

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Démontrer que $f(x) = (x-1)^2 - 1$.
3. Démontrer que la fonction f est minorée par -1.
4. Tracer soigneusement la représentation graphique C_f de la fonction f. (On se limitera à l'intervalle $[-1 ; 3]$)

Exercice 6

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Tracer soigneusement la représentation graphique C_f de la fonction f.
4. Démontrer que la fonction f admet un maximum $M = 2$. (On pourra déterminer le signe de $\left[f(x)\right]^2 - 4$)

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 3] par $f(x) = -x^2 + 3x - 2$.

1. Démontrer que $f(x) = (1 - x)(x - 2)$.
2. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 3].
3. Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

Exercice 8

Voici un tableau de variations :

x	-3		-1		1		$+3$
$f(x)$	$-0,3$	↘	$-0,5$	↗	$0,5$	↘	$0,3$

Dessiner la représentation graphique d'une fonction f vérifiant ce tableau.

Exercice 9

1. Tracer la représentation graphique de la fonction "inverse".
2. Trouver à l'aide du graphique les solutions de l'encadrement : $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1$.

Exercice 10

Soit f une fonction affine et g une fonction linéaire.

1. Sachant que $f(2) = 6$ et $f(0) = 1$, déterminer l'expression de $f(x)$.
2. Sachant que $g(2) = 6$, déterminer l'expression de $g(x)$.
3. Tracer les droites C_f et C_g représentant les fonctions f et g.

Exercice 11

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-5 ; 5]$ par $g(x) = |x + 1|$.

1. Tracer la représentation graphique de la fonction g.
2. Résoudre l'équation $|x + 1| = 3$. (Méthode libre)

Exercice 12

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 3(1 - x)^2 + 2$.

On veut établir que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

Recopier en complétant la démonstration suivante avec les signes < ou > :

Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle $[1 ; +\infty[$ tels que $x_1 < x_2$:

En multipliant par –1 chaque membre, on obtient : $-x_1 \dots -x_2$.

En ajoutant 1 à chaque membre, on obtient : $1 - x_1 \dots 1 - x_2$.

Or $1 - x_1$ et $1 - x_2$ sont des réels de l'intervalle $]-\infty ; 0[$, donc si on élève chaque membre au carré, la fonction carré étant <u>strictement décroissante</u> sur $]-\infty ; 0[$, on obtient : $(1 - x_1)^2 \dots (1 - x_2)^2$.

En multipliant chaque membre par 3, on obtient : $3(1 - x_1)^2 \dots 3(1 - x_2)^2$.

En ajoutant 1 à chaque membre, on obtient $3(1 - x_1)^2 + 1 \dots 3(1 - x_2)^2 + 1$.

Ce qui s'écrit encore $f(x_1) \dots f(x_2)$.

<u>Conclusion</u> : la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

Faire de même avec la fonction g définie par $g(x) = -2(x - 3)^2 + 4$ sur l'intervalle $[3 ; +\infty[$.

Exercice 13

Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ pour $x \in\ ]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 1[$.

Exercice 14

Soit f une fonction affine et g une fonction linéaire.

1. Sachant que $f\left(\dfrac{3}{4}\right) = 2$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$, déterminer l'expression de $f(x)$.
2. Sachant que $g(3) = 2$, déterminer l'expression de $g(x)$.
3. Tracer les droites C_f et C_g représentant les fonctions f et g.

Exercice 15

1. Tracer très soigneusement la représentation graphique de la fonction "racine carrée".
2. Trouver à l'aide du graphique les solutions de l'encadrement : $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2$.

Exercice 16

On considère la fonction g définie sur l'intervalle [–5 ; 5] par $g(x) = |x - 2|$.

1. Tracer la représentation graphique de la fonction g.
2. Résoudre l'équation $| x - 2| = 3$. (Méthode libre)

Exercice 17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5(1 - x)^2 - 2$.

Démontrer que f est strictement croissante sur l'intervalle [1 ; +∞[.

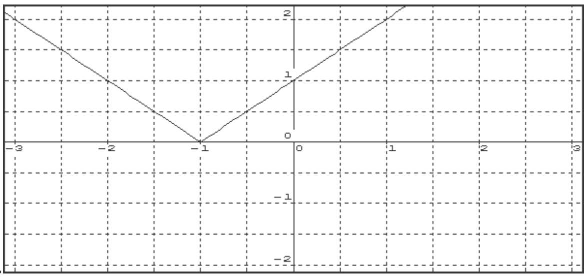
Exercice 18

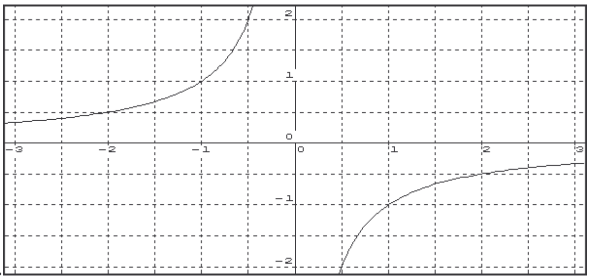
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

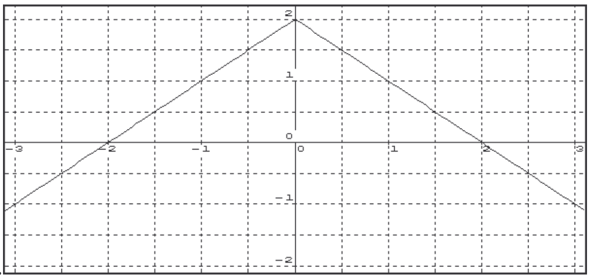
1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Démontrer que $f(x) < 1$.
3. Tracer la représentation graphique C_f de la fonction f.

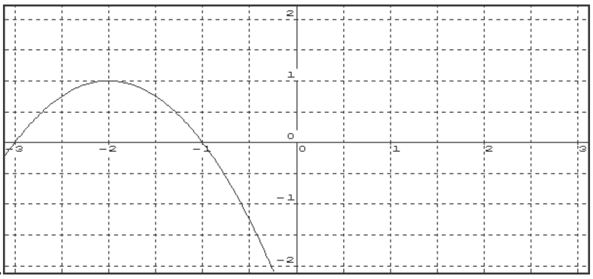
Exercice 19

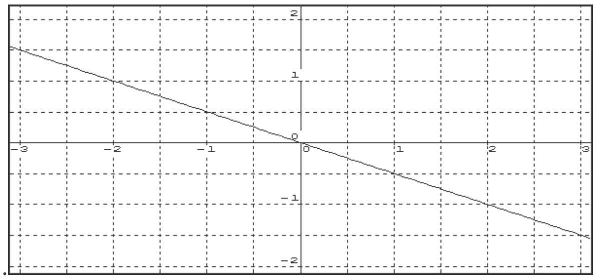
Voici les représentations graphiques de 8 fonctions :

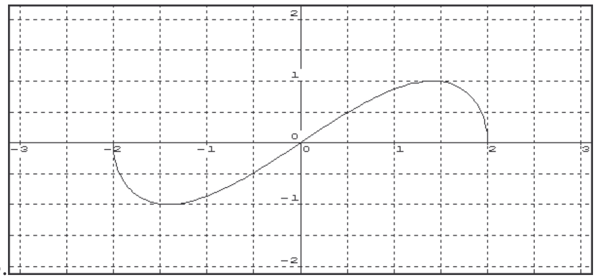
C1. 

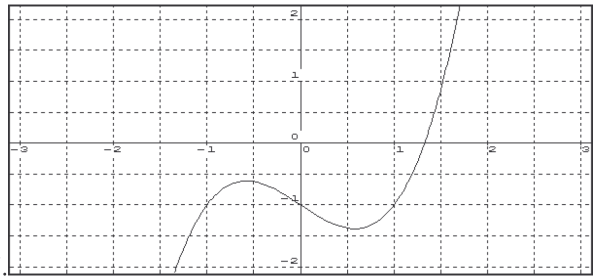
C2. 

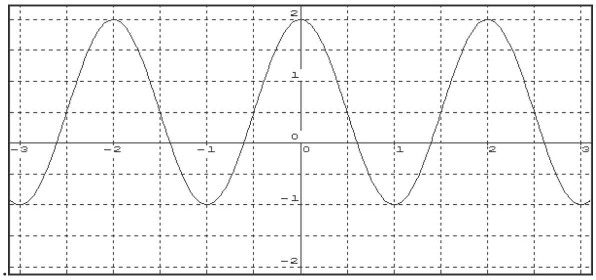
C3. 

C4. 

C5. 

C6. 

C7. 

C8. 

Quelles sont les représentations graphiques des fonctions qui vérifient les situations suivantes ?

(Attention ! Il peut y avoir plusieurs réponses possibles, il faut toutes les trouver)

1. f est une fonction paire.
2. f est une fonction impaire.
3. L'équation $f(x) = 1$ possède exactement 2 solutions.
4. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est l'ensemble vide.
5. f est une fonction croissante sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.
6. L'ensemble des solutions de $f(x) > -1$ est $\mathbb{R}$.
7. $f(x) = |x - 1|$.
8. $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in [-3 ; 3]$.

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$.

1. Calculer l'image de $-\sqrt{2}$ par f.
2. Déterminer le ou les antécédents de 1 par f.
3. Résoudre, par le calcul, l'inéquation $f(x) \geqslant 1$.

Exercice 21

1. Tracer sur un même repère les représentations graphiques des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^3 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 - x \qquad \text{sur l'intervalle } [-2 ; 2]$$

2. Quel est le nombre de solutions de l'équation suivante : $x^3 + x - 1 = 0$?

Exercice 22

Étudier la *parité* des fonctions f, g et h définies ci-dessous :

1. $f(x) = |x| - x^2$ sur $[-6 ; 6]$.
2. $g(x) = x^3 - 1$ sur $[-4 ; 4]$.
3. $h(x) = x - 3x^5 - x^7$ sur $[-2 ; 3]$

Exercice 23

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4 ; 4]$ par :

$$f(x) = x^2 + x - 6.$$

1. Tracer la représentation graphique C_f de la fonction f.
2. Démontrer que $f(x) = (x - 2)(x + 3)$
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

Exercice 24

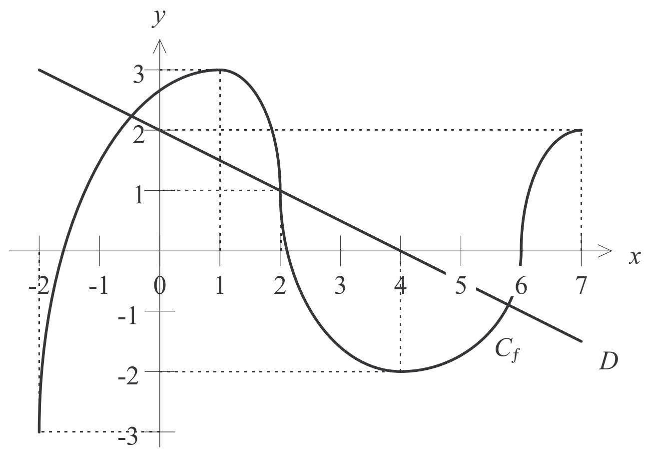
On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3 \qquad\qquad g(x) = -\frac{1}{2}x$$

1. Développer l'expression $\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 2)$.
2. Étudier la parité des fonctions f et g.
3. Sur un même repère, tracer très soigneusement les représentations graphiques des fonctions f et g.
4. En déduire les tableaux de variations de f et g.
5. Résoudre graphiquement et par le calcul l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

Exercice 25

Ci-dessous, on a tracé une droite D et la représentation graphique C_f d'une fonction f définie sur [–2 ; 7].



1. La droite D a pour équation (entourer la bonne réponse) :

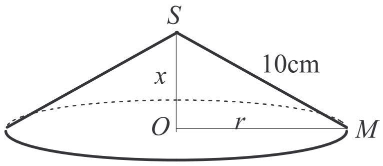
$y = 2x - 4$ $\qquad$ $y = -2x + 2$ $\qquad$ $y = \dfrac{1}{2}x - 2$ $\qquad$ $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$

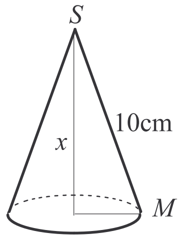
2. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

	A F F I R M A T I O N S	vrai ou faux
1	L'image de –2 par la fonction f est 4.	
2	Le nombre 7 est un antécédent du nombre 2 par la fonction f.	
3	$f(1) = 3$.	
4	Le nombre 2 a trois antécédents par la fonction f.	
5	L'équation $f(x) = 1$ possède 3 solutions dans l'intervalle [–2 ; 4].	
6	L'équation $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2$ possède 3 solutions dans l'intervalle [–2 ; 7].	
7	La fonction f est croissante sur l'intervalle [–2 ; 7].	
8	La fonction f est décroissante sur l'intervalle [1 ; 4].	

Exercice 26

On considère tous les cônes droits dont la génératrice SM mesure 10 cm.





On appelle x la hauteur (variable) en cm de ces cônes ($0 < x < 10$)

Soit r le rayon de la base (en cm).

1. Exprimer r^2 en fonction de x^2.
2. Montrer que le volume $V(x)$ du cône de hauteur x est : $V(x) = \dfrac{\pi(100 - x^2)x}{3}$ cm^3.
3. Tracer la représentation graphique de la fonction V sur l'intervalle [0 ; 10].
4. Déterminer graphiquement la valeur x_M de la variable x pour laquelle le volume du cône est maximal.
5. Déterminer graphiquement les valeurs de x pour lesquelles on a $V(x) \geqslant 200$ cm^3.

Exercice 27

On considère la fonction "inverse" f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

1. Quel est le sens de variation de cette fonction sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$?
2. Si x_1 et x_2 sont deux réels de $]-\infty\,;0[$ tels que $x_1 < x_2$, que dire de $\dfrac{1}{x_1}$ et $\dfrac{1}{x_2}$?

Exercice 28

1. Tracer, dans un même repère, les droites représentant les fonctions affines f, g et h suivantes :

$$f(x) = x \qquad\qquad g(x) = 8 \qquad\qquad h(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

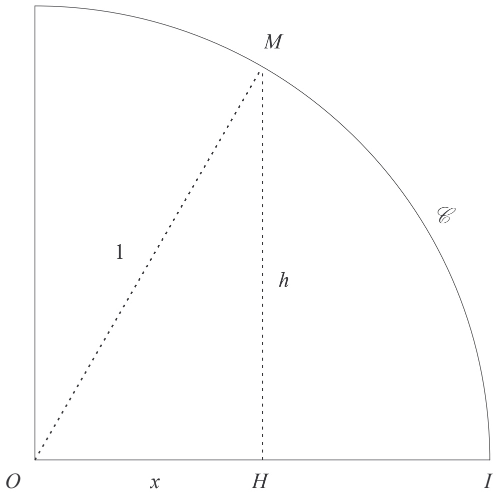
2. a. Calculer l'image de 4 par la fonction h.
   b. Calculer le nombre qui a pour image 12 par la fonction h.
   c. Résoudre l'équation $h(x) = g(x)$.
3. En utilisant le graphique, chercher un nombre x tel que $h(x) < g(x) < f(x)$. Vérifier par calcul.

Exercice 29

1. Développer : $(2x - 1)^2$
2. Soit f la fonction définie par : $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

   Déterminer les antécédents éventuels, par f, de 9.

Exercice 30



On considère un quart de cercle $\mathscr{C}$ de rayon $OI = 1$.

M est un point quelconque de ce quart de cercle.

H est le pied de la hauteur issue de M dans le triangle IMO.

On note x la longueur OH et h la longueur HM .

On a donc $0 \leqslant x \leqslant 1$.

(Voir figure ci-contre)

1. Exprimer la longueur h en fonction de x.
2. Soit f la fonction qui à x associe l'aire du triangle OMH.

   Démontrer que : $$f(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$
3. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1
$f(x)$												

On arrondira les valeurs de $f(x)$ à 10^{-2} près.

4. Tracer, sur une feuille séparée, la représentation graphique C_f de la fonction f dans un repère.

   (Unités graphiques : en abscisse : 10 cm pour une unité ; en ordonnée : 20 cm pour une unité)

Exercice 31

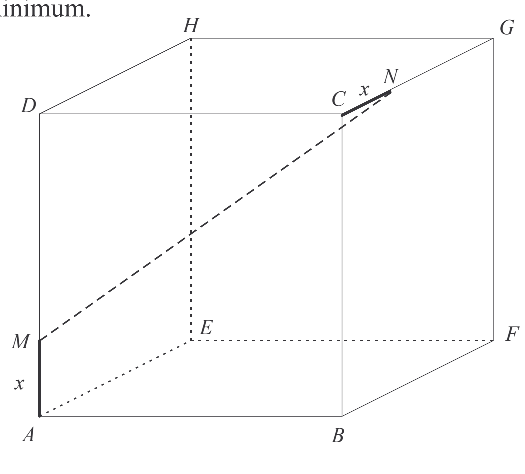
$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1, représenté ci-dessous.

M est un point de l'arête $[AD]$, N un point de l'arête $[CG]$ tels que $AM = CN = x$. (Voir figure ci-dessus)

On note $f(x)$ la longueur MN.

1. Que vaut $f(0)$? Et $f(1)$?
2. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
3. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1].
4. À l'aide du graphique, déterminer la valeur de x pour laquelle la longueur $f(x)$ est minimale.

   Calculer la valeur de ce minimum.



Exercice 32

Les maîtres nageurs d'une plage disposent d'un cordon flottant d'une longueur de 400 m avec lequel ils souhaitent définir une zone de baignade surveillée de forme rectangulaire. Un des buts du problème est de déterminer les dimensions x et y (exprimées en m) de ce rectangle (voir figure ci-dessous) pour que la zone de baignade surveillée ait une aire maximale.

1. *Question préliminaire*

   Étudier, à l'aide d'un tableau, le signe de : $x(400-2x)$

   En déduire les solutions, sur $\mathbb{R}$, de l'inéquation :

$$-2x^2+400x \geqslant 0$$

2. *Expressions de l'aire de la zone de baignade*

   a. Calculer l'aire de la zone de baignade lorsque $x = 50$ m.

   b. Sachant que la longueur du cordon est de 400 m, exprimer y en fonction de x.

   c. Exprimer, en fonction de x, l'aire $A(x)$ de la zone de baignade pour $x \in [0 ; 200]$.

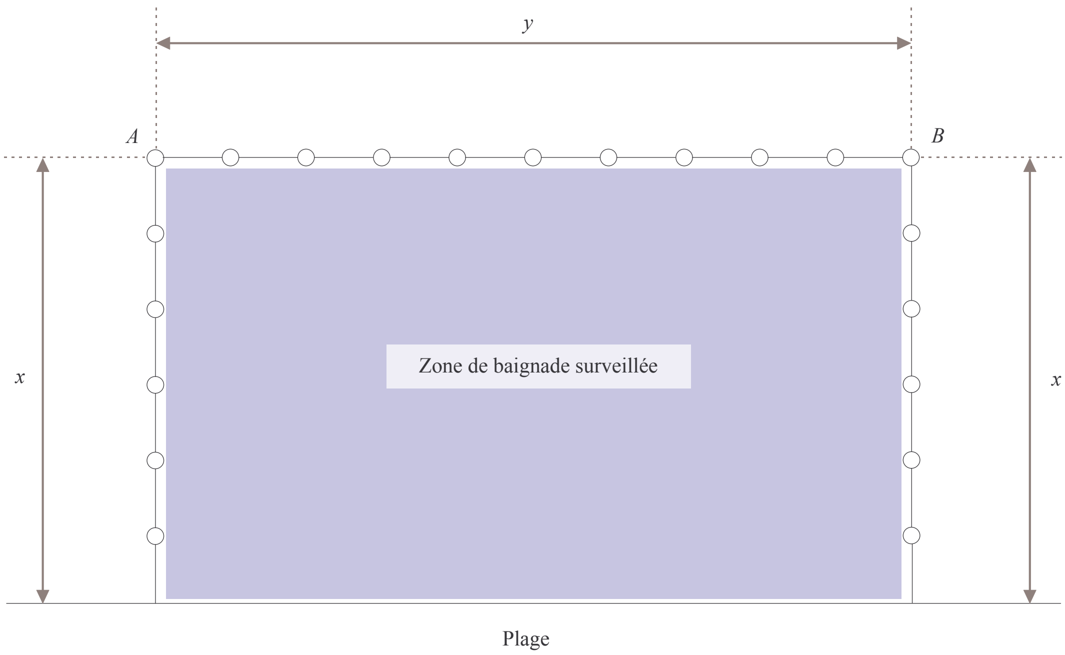
   d. Démontrer que, pour tout $x \in [0 ; 400]$, $A(x)$ peut encore s'écrire sous la forme :

$$A(x) = 20\,000 - 2(x-100)^2$$

3. *Quelques calculs et recherche de l'aire maximale*

   a. Peut-on obtenir une aire de 22 000 m^2 ? Justifier.

   b. Quelle est l'aire maximale ? Quelles sont alors les dimensions du rectangle ? Justifier les réponses.



4. *Question de recherche (facultative)*

   En supposant que les maîtres nageurs puissent faire, toujours avec le cordon de 400 m, une zone de baignade en forme de demi-disque, quelle serait alors l'aire obtenue ?

QCM 1

Pour chacune des cinq questions ci-dessous, il y a une et une seule réponse exacte.

1. Dire qu'une fonction est paire signifie que sa courbe est :
   - *A* symétrique par rapport à l'axe des abscisses (Ox)
   - *B* symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy)
   - *C* symétrique par rapport à l'origine O du repère
2. Dire qu'une fonction est impaire signifie que sa courbe est :
   - *A* symétrique par rapport à l'axe des abscisses (Ox)
   - *B* symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy)
   - *C* symétrique par rapport à l'origine O du repère
3. Soient a et b deux réels négatifs tels que $a < b$. Alors :

   A $a^2 < b^2$ *B* $a^2 > b^2$ *C* Ca dépend
4. Soient a et b deux réels quelconques tels que $a < b$. Alors :

   A $a^2 < b^2$ *B* $a^2 > b^2$ *C* Ca dépend
5. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$. Alors :

   A $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ *B* $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ *C* Ca dépend

QCM 2

Pour chacune des huit questions ci-dessous, il y a une et une seule réponse exacte.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = (x-2)(x-3)$

Note : tracer la représentation graphique de la fonction f peut aider à contrôler certains résultats.

1. Si on développe $f(x)$, on obtient :

   A $x^2 - x + 6$ *B* $x^2 - x - 6$ *C* $x^2 - 5x + 6$
2. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont :

   A -2 et -3 *B* 2 et 3 *C* x et 0
3. L'image de 1 par f est :

   A 1 *B* 2 *C* 3
4. Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ sont :

   A $[-3 ; -2]$ *B* $[2 ; 3]$ *C* $]-\infty ; 2] \cup [3, +\infty[$
5. La fonction f est toujours positive :

   A VRAI *B* FAUX *C* On ne peut pas le savoir
6. Les antécédents éventuels de 6 par f sont :

   A il n'y en a pas *B* 12 *C* 0 et 5
7. La fonction f est croissante sur l'intervalle :

   A $[2 ; +\infty[$ *B* $[0 ; +\infty[$ *C* $[2,5 ; +\infty[$
8. La fonction f est :

   A paire *B* impaire *C* ni paire, ni impaire