EXERCICES SUR LES DIFFÉRENTS TYPES DE NOMBRES

Les exercices ci-dessous sont à faire sans calculatrice

Exercice 1

Démontrer que les nombres suivants sont entiers :

$$A = \frac{\sqrt{722}}{\sqrt{2}}$$

$$B = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab}$$

$$C = \frac{3^{10}}{243}$$

$$D = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2}$$

Exercice 2

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On pose : $a = \frac{p+1}{2}$ et $b = \frac{p-1}{2}$

1. Justifier que a et b sont des entiers
2. Calculer $a^2 - b^2$ en fonction de p.
3. Démontrer que tout nombre premier $p \geqslant 3$ peut s'écrire comme différence de deux carrés d'entiers.

   Donner cette différence pour $p = 29$.

Exercice 3

Les nombres affichés sur l'écran d'une calculatrice (type collège) appartiennent à quel ensemble ?

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes et dire à quels ensembles de nombres appartiennent leurs solutions :

$$(3x - 2)(2x + 1) = x(6x - 2)$$

$$\left(\sqrt{8}x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{12}x + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$ax + b = 0 \text{ où } a \in \mathbb{Z}^* \text{ et } b \in \mathbb{Z}$$

$$x^2 - \pi x = 0$$

Exercice 5

1. Démontrer que la somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.
2. La somme de deux nombres irrationnels est-elle un nombre irrationnel ?

Exercice 6

Les nombres 5814 et 3876 ont-ils les mêmes diviseurs premiers ?

Exercice 1

$$A = \frac{\sqrt{722}}{\sqrt{2}}$$

On a : $722 = 2 \times 361 = 2 \times 19^2$

D'où : $A = \dfrac{\sqrt{2\times 19^2}}{\sqrt{2}} = 19$

$$B = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab}$$

On développe : $(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$

D'où : $B = \dfrac{4ab}{ab} = 4$

$$C = \frac{3^{10}}{243}$$

Il suffit de remarque que : $243 = 3^5$

Ainsi : $C = \dfrac{3^{10}}{3^5} = 3^5 = 243$

On multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par $\sqrt{2} + 1$:

$$D = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2} = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} - 2\sqrt{2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{2-1} - 2\sqrt{2} = 3$$

Conclusion : A, B, C et D sont bien des entiers naturels

Exercice 2

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On pose : $a = \dfrac{p+1}{2}$ et $b = \dfrac{p-1}{2}$

1. Puisqu'un nombre premier $p \geqslant 3$ est toujours impair, les nombres $p + 1$ et $p - 1$ sont pairs.

   Donc a et b sont bien des entiers.

2. On a : $a^2 - b^2 = \left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2 = \dfrac{4p}{4} = p$

3. D'après la question précédente, on a toujours :

$$p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

   Avec $p = 29$, cela donne : $29 = 15^2 - 14^2$

Exercice 3

Puisque le développement décimal des nombres affichés s'arête, les calculatrices travaillent avec des nombres décimaux.

Exercice 4

$$(3x-2)(2x+1) = x(6x-2)$$
$$6x^2 - x - 2 = 6x^2 - 2x$$
$$x = 2 \in \mathbb{N}$$

$$\left(\sqrt{8}x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{12}x + \sqrt{3}\right) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

$$\left(\sqrt{8}x - \sqrt{2}\right) = 0 \text{ ou } \left(\sqrt{12}x + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$$

$$ax + b = 0 \text{ où } a \in \mathbb{Z}^* \text{ et } b \in \mathbb{Z}$$
$$x = -\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$$

$$x^2 - \pi x = 0$$
$$x(x-\pi) = 0$$
$$x = 0 \in \mathbb{N} \text{ ou } x = \pi \in \mathbb{R}$$

Exercice 5

1. Deux nombres rationnels s'écrivent sous forme de fractions d'entiers $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.

   Leur somme est : $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

   Comme $ad + bc$ et bd sont des entiers, le nombre $\frac{ad+bc}{bd}$ est bien rationnel.

2. Non, prenons $A = \pi$ et $B = -\pi$ qui sont tous deux irrationnels. On a $A + B = 0$ qui n'est pas irrationnel !

Exercice 6

On décompose 5814 et 3876 en produit de facteurs premiers et on trouve :

$$5814 = 2 \times 3^2 \times 17 \times 19$$
$$3876 = 2^2 \times 3 \times 17 \times 19$$

Oui, les nombres 5814 et 3876 ont les mêmes diviseurs premiers.