GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

1. Qu'est-ce qu'une fonction ? Vocabulaire

Définition *Notion de fonction*

À chaque fois que l'on associe à une quantité x une (autre) quantité y, on dit que que l'on définit une fonction.

Les fonctions sont désignées par des lettres. On note par exemple :

$$f : x \mapsto y$$

ou encore :

$$f(x) = y$$

On dit que y est l'image de x.

On dit que x est un antécédent de y.

Exemples :

- On choisit un nombre réel x (non nul). On lui ajoute 4, on élève le résultat obtenu au carré, on retranche 16, on divise par le nombre de départ et on retranche 6. Quelle est la fonction f correspondante ?

$$f(x) = \frac{(x+4)^2 - 16}{x} - 6 = \frac{x^2 + 8x}{x} - 6 = x + 8 - 6 = x + 2$$

  Avec cette fonction, il suffit d'ajouter 2 pour obtenir l'image d'un nombre x.

- On considère la fonction f définie par : $\quad f : x \mapsto x^2 - 4$

  (Cette fonction élève au carré le nombre de départ x puis lui retranche 4)

  Quelle est l'image de 3 ? $\quad f(3) = 3^2 - 4 = 5$

  Quelle est l'image de –1 ? $\quad f(-1) = (-1)^2 - 4 = -3$

  Quels sont les antécédents éventuels de 12 ? On cherche le ou les nombres x qui vérifient :

$$f(x) = 12$$
$$x^2 - 4 = 12$$
$$x^2 - 16 = 0$$
$$(x - 4)(x + 4) = 0$$
$$x = 4 \text{ ou } x = -4$$

  Le nombre 12 possède deux antécédents par la fonction f qui sont 4 et –4.

  Quels sont les antécédents éventuels de –5 ? On cherche le ou les nombres x qui vérifient :

$$f(x) = -5$$
$$x^2 - 4 = -5$$
$$x^2 = -1$$

  Or, le carré d'un nombre réel ne peut pas être négatif, cette équation n'a pas de solution.

  Le nombre –5 n'a pas d'antécédent par f.

  (Pour une illustration de tous ces calculs, on pourra regarder le graphique à la page suivante)

Comme on le constate sur l'exemple précédent, il peut très bien ne pas y avoir d'antécédents et il peut aussi y en avoir plusieurs. Tout dépend du nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

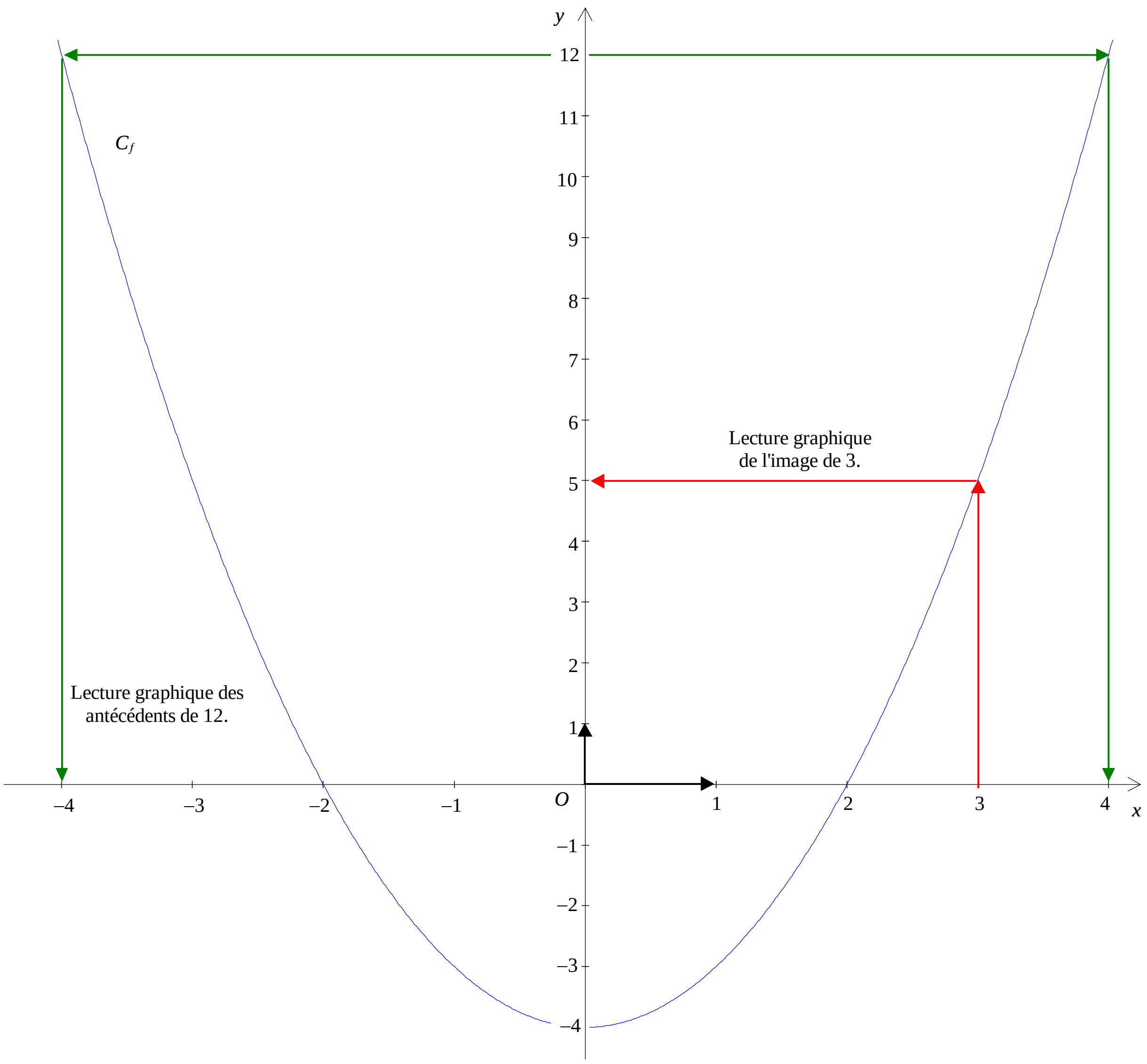
Définition *Représentation graphique*

La représentation graphique d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ dans un repère donné. Cette représentation graphique est souvent notée C_f. Lorsque cette représentation graphique est d'un seul "tenant", on parle alors de la *courbe représentative* de la fonction f.

Pour esquisser une représentation graphique, on remplit souvent un tableau de valeurs.

Exemple avec $f(x) = x^2 - 4$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12



Remarque : il est préférable d'avoir bien étudié la fonction (sens de variation, extremums, voir les paragraphes suivants) avant de tracer sa représentation graphique. En effet, entre deux valeurs calculées, il peut parfois y avoir des surprises ! Par exemple, tracez la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x^3 + 4x + 2$ sur l'intervalle $[-2 ; 2]$. Si vous remarquez un phénomène étrange, c'est que les points calculés sont en nombre insuffisants pour vous renseigner sur l'allure réelle de la courbe...

Définition *Ensemble de définition d'une fonction*[(1)] L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble de **tous** les réels x pour lesquels $f(x)$ est calculable.

Exemples :

- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{2x-5}$

  Les nombres $f(x)$ sont calculables si et seulement si :

  $$2x - 5 > 0$$

  $$x > \frac{5}{2}$$

  L'ensemble de définition de cette fonction f est :

  $$D_f = \left]\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$$

Une curiosité : Soit f la fonction qui à x associe : $\sqrt{x} + \sqrt{-x} + \frac{1}{x}$ Quel est son ensemble de définition ?

- Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$

  Les nombres $g(x)$ sont calculables si et seulement si :

  $$x - 2 \neq 0$$

  $$x \neq 2$$

On dit que 2 est une "valeur interdite".

  L'ensemble de définition de cette fonction g est :

  $$D_g =]-\infty\,;\,2[\,\cup\,]2\,;\,+\infty[$$

  Ce que l'on note encore : $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

- Soit h la fonction définie par : $h(x) = \dfrac{1}{3x^2+9x}$

  Dans ce cas, on peut plutôt chercher les valeurs de x pour lesquelles $h(x)$ n'est **pas** calculable :

  $$3x^2 + 9x = 0$$

  On factorise par $3x$: $3x(x+3) = 0$

  $$x = 0 \text{ ou } x = -3$$

  L'ensemble de définition de cette fonction h est donc :

  $$D_h =]-\infty\,;\,-3[\,\cup\,]-3\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$$

- Soit k la fonction définie par : $k(x) = \sqrt{2-3x} + \dfrac{1}{2x+5}$

  Les nombres $k(x)$ sont calculables si et seulement si :

  $$2 - 3x \geqslant 0 \text{ et } 2x + 5 \neq 0$$

  $$2 \geqslant 3x \text{ et } 2x \neq -5$$

  $$x \leqslant \frac{2}{3} \text{ et } x \neq -\frac{5}{2}$$

  L'ensemble de définition de cette fonction k est donc :

  $$D_k = \left]-\infty\,;-\frac{5}{2}\right[\,\cup\,\left]-\frac{5}{2}\,;\frac{2}{3}\right]$$

- Dans le cas de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4$, que nous avons représentée plus haut, on a $D_f = \mathbb{R}$.

(1) En général, cette question ne se pose pas ; en effet, se donner une fonction, c'est se donner un ensemble de départ E, un ensemble d'arrivée F et un procédé qui à tout élément x de E associe un élément y de F. Se pose la question lorsqu'on recherche la plus grande partie E de $\mathbb{R}$ sur laquelle on peut effectivement définir la fonction f.

2. Sens de variation d'une fonction

Définition

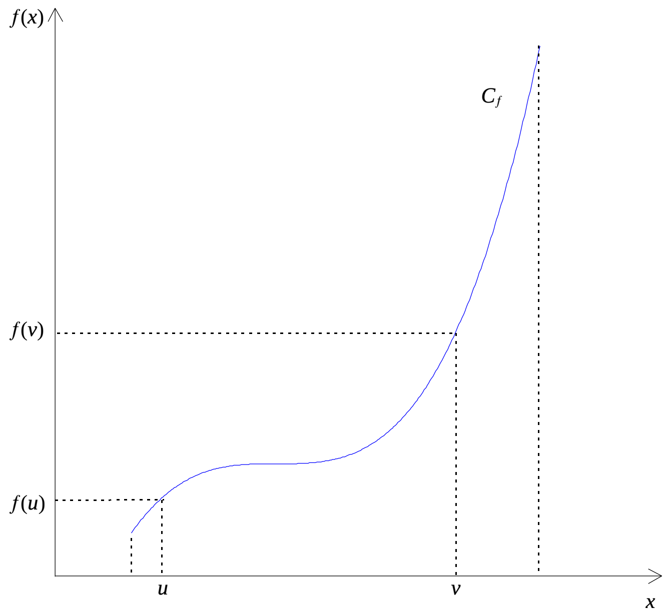
Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle I. On dit que :

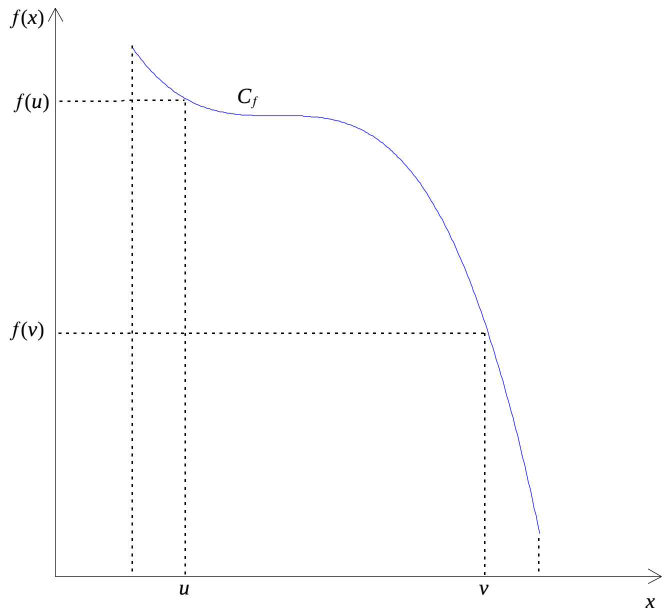
- f est croissante sur I si : pour tous u et v dans I : $\boldsymbol{u < v \Rightarrow f(u) \leqslant f(v)}$
- f est strictement croissante sur I si : pour tous u et v dans I : $\boldsymbol{u < v \Rightarrow f(u) < f(v)}$
- f est décroissante sur I si : pour tous u et v dans I : $\boldsymbol{u < v \Rightarrow f(u) \geqslant f(v)}$
- f est strictement décroissante sur I si : pour tous u et v dans I : $\boldsymbol{u < v \Rightarrow f(u) > f(v)}$
- f est monotone sur I si f est croissante sur I ou décroissante sur I.
- f est strictement monotone sur I si f est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Remarques :

- ces notions ne sont valables que sur **un intervalle** ;
- on dit parfois que f est croissante si elle conserve les inégalités et que f est décroissante si elle renverse les inégalités ;
- si une fonction est strictement croissante sur un intervalle I, alors elle est croissante sur I.

Illustration graphique :





Fonction croissante :

$u < v \Rightarrow f(u) \leqslant f(v)$

Fonction décroissante :

$u < v \Rightarrow f(u) \geqslant f(v)$

<u>Exemple</u> : poursuivons l'étude de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4$ et montrons, comme le suggère le graphique, que cette fonction est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$.

Soient u et v deux réels quelconques de l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Supposons que :

$$0 \leqslant u < v \qquad \textbf{(1)}$$

Alors en multipliant les membres des inégalités **(1)** par u (qui est positif), on obtient :

$$0 \leqslant u^2 < uv \qquad \textbf{(2)}$$

Par ailleurs, en multipliant l'inégalité **(1)** par v (qui est aussi positif), on obtient :

$$0 \leqslant uv < v^2 \qquad \textbf{(3)}$$

En combinant les inégalités **(2)** et **(3)**, nous obtenons :

$$u^2 < v^2$$

Et en retranchant 4 dans chaque membre : $u^2 - 4 < v^2 - 4$

C'est-à-dire : $f(u) < f(v)$

La fonction f est donc bien strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Soient u et v deux réels quelconques de l'intervalle $[-\infty ; 0]$. Supposons que :

$$u < v \leqslant 0 \qquad \textbf{(1')}$$

Alors en multipliant les membres des inégalités **(1′)** par u (qui est négatif), on obtient :

$$u^2 > uv \geqslant 0 \qquad \textbf{(2')}$$

Par ailleurs, en multipliant l'inégalité **(1′)** par v (qui est aussi négatif), on obtient :

$$uv > v^2 \geqslant 0 \qquad \textbf{(3')}$$

En combinant les inégalités **(2′)** et **(3′)**, nous obtenons :

$$u^2 > v^2$$

Et en retranchant 4 dans chaque membre : $u^2 - 4 > v^2 - 4$

C'est-à-dire : $f(u) > f(v)$

La fonction f est donc bien strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Nous ferons, plus tard, une étude plus systématique du sens de variation des fonctions usuelles suivantes :

$x \mapsto x^2$ (fonction "carré")

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (fonction "inverse")

$x \mapsto ax + b$ (fonctions "affines")

$x \mapsto x^3$ (fonction "cube")

$x \mapsto \sqrt{x}$ (fonction "racine carrée")

Le sens de variation d'une fonction peut être résumé dans un tableau (appelé "**tableau de variations**").

Par exemple avec la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4$, nous obtenons le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de la fonction f	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

On constate que cette fonction f admet un minimum égal à -4 (mimimum atteint lorsque $x = 0$)

Consacrons un paragraphe à cette notion de minimum et de maximum.

3. Maximum et minimum d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Dire que le nombre $f(a)$ est un maximum de f sur I signifie que pour tout réel x de I : $$f(x) \leqslant f(a)$$

Remarques :

- Il existe des fonctions sans maximum (c'est le cas de la fonction $x \mapsto x^2 - 4$ lorsqu'on la considère sur $\mathbb{R}$).
- La notion de maximum est liée à l'intervalle considéré.

Exercice : donner la définition du minimum d'une fonction sur un intervalle I (s'il existe).

Exemple : soit f la fonction définie par : $f(x) = x(1 - x)$

Démontrer que f admet un maximum égal à $\frac{1}{4}$ sur $\mathbb{R}$. (On peut utiliser un graphique pour conjecturer ce résultat)

On étudie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de la différence :

$$\frac{1}{4} - f(x) = \frac{1}{4} - x(1 - x) = \frac{1}{4} - x + x^2 = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$$

Et comme, $\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit :

$$f(x) \leqslant \frac{1}{4} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

De plus : $$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $$f(x) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$$

La fonction f admet bien un maximum, sur $\mathbb{R}$, égal à $\frac{1}{4}$ qui est atteint pour $x = \frac{1}{2}$.

4. Fonctions linéaires - Fonctions affines

Définition

Les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, dont l'expression peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = ax + b \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels}$$

sont appelées fonctions affines.

Deux cas particuliers :

- lorsque $b = 0$, la fonction $f : x \longmapsto ax$ est dite linéaire
- lorsque $a = 0$, la fonction $f : x \longmapsto b$ est (dite) constante.

Exemples : les fonctions f et g définies ci-dessous sont affines

- $f(x) = 3x + 2$
- $g(x) = (x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$

Une fonction affine est la somme d'une fonction linéaire et d'une fonction constante.

Vocabulaire :

Le réel a s'appelle coefficient directeur et le réel b l'ordonnée à l'origine.

Théorème

La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère est **une droite**.

Celle d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

Démonstration

Plaçons-nous dans un repère quelconque $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et montrons déjà le théorème pour les fonctions linéaires.

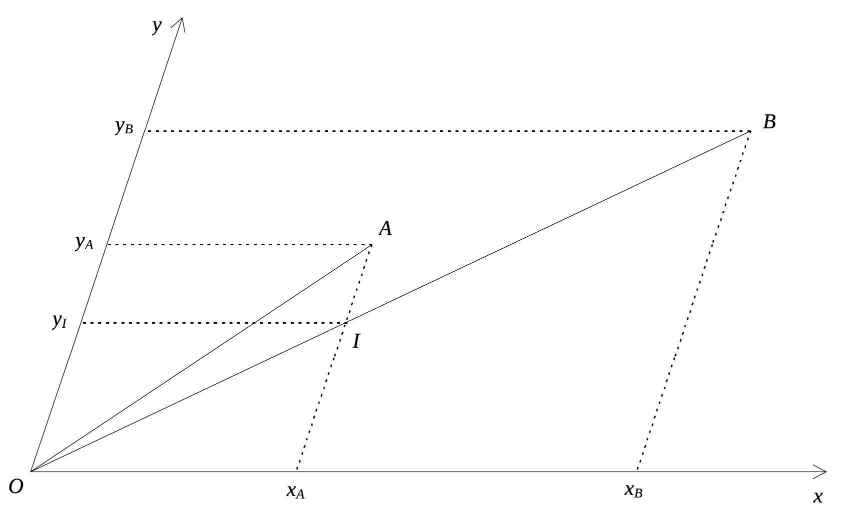
Soit $f : x \longmapsto ax$ une fonction linéaire avec a non nul (si a est nul, la représentation graphique de f est l'axe des abscisses qui est bien une droite)

Soient $A(x_A , y_A)$, $B(x_B, y_B)$ deux points de la représentation graphique de f d'abscisses x_A et x_B strictement positives.

On a donc : $$y_A = ax_A \text{ et } y_B = ax_B$$

Considérons le point I projeté du point A sur la droite (OB) parallèlement à l'axe (Oy). (Voir figure ci-dessous)

Les points I et A possèdent donc la même abscisse.



Par applications successives du théorème de Thalès, on a :

$$\frac{x_A}{x_B} = \frac{OI}{OB} = \frac{y_I}{y_B}$$

Or, $y_B = ax_B$ donc : $$\frac{x_A}{x_B} = \frac{y_I}{ax_B}$$

D'où : $$y_I = ax_A = y_A$$

Les points I et A sont donc confondus.

Comme O, I et B sont alignés, il en est donc de même des points O, A et B.

La partie de de la représentation graphique de f correspondant aux abscisses positives est donc bien une droite.

Comme la représentation graphique de f est symétrique par rapport à l'origine O du repère, on en déduit que c'est également une droite.

Le cas des fonctions affines s'en déduit par translation de vecteur $b\vec{j}$.

Liens avec les situations de proportionnalité

Les fonctions linéaires correspondent à des situations de proportionnalités. En effet, si deux grandeurs x et y sont proportionnelles, liées par un coefficient a, on a alors :

$$y = ax$$

Par contre, si f est une fonction affine (non linéaire) alors **les nombres $f(x)$ ne sont pas proportionnels aux nombres x**. Cependant, les accroissements de $f(x)$ sont proportionnels à ceux de x. En effet, pour tous réels x et x' on a : $$f(x') - f(x) = ax' - ax = a(x' - x)$$

Réciproquement, si une fonction f possède la propriété que les variations des images est proportionnelle aux variations des abscisses, alors f est affine. En effet, s'il existe un réel a tel que pour tous réels x et x' :

$$f(x) - f(x') = a(x - x')$$

Alors en particulier pour $x' = 0$: $$f(x) - f(0) = ax$$

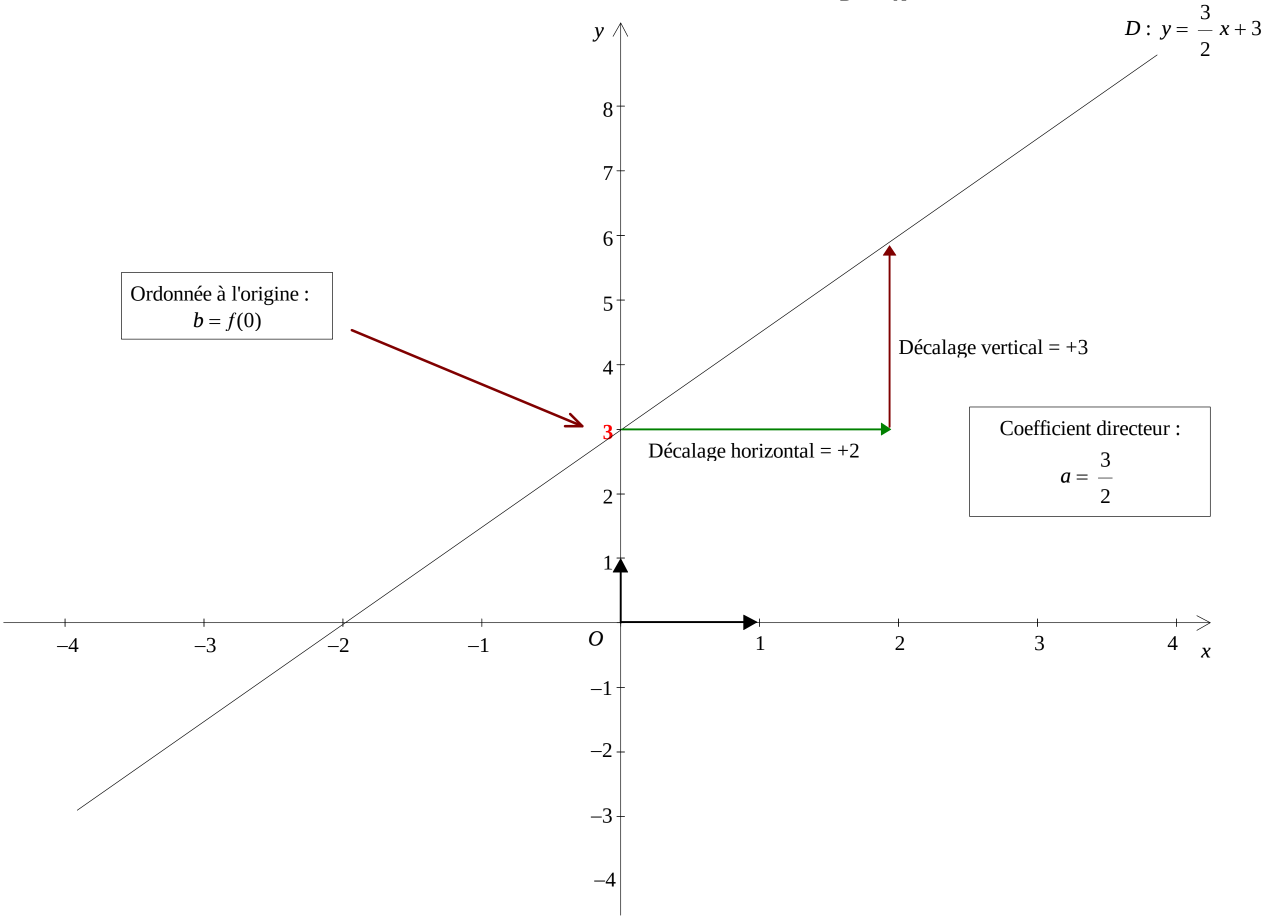
$$f(x) = ax + f(0)$$

Ce qui prouve bien que f est affine.

Le coefficient de proportionnalité est le réel a. On l'appelle accroissement moyen ou coefficient directeur de f.

Interprétation graphique du coefficient directeur

On a vu que : $$a = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{\text{décalage vertical}}{\text{décalage horizontal}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



Sur l'exemple représenté ci-dessus, on donne un coefficient directeur $a = \frac{3}{2}$ et une ordonnée à l'origine $b = 3$. Ceci permet de facilement tracer la droite D (en cas de valeurs moins pratiques de a et b on calcule l'image de deux points et c'est fini). Réciproquement, si c'est la droite D qui est donnée, la construction permet de retrouver graphiquement le coefficient directeur a. Par calcul, on utilise la formule ci-dessus.

Théorème *Sens de variation d'une fonction affine*

Soit $f : x \longmapsto ax + b$ une fonction affine.

- Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

C'est une conséquence de la règle des signes.

Supposons $a > 0$. Soient u et v deux réels quelconques tels que :

$$u < v$$

Les réels $v - u$ et a sont tous les deux positifs, donc :

$$a(v - u) > 0$$

En distribuant : $$av - au > 0$$

En ajoutant au : $$au < av$$

En ajoutant b : $$au + b < av + b$$

$$f(u) < f(v)$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En quelque sorte, on démontre ici, qu'on ne change pas le sens d'une inégalité lorsqu'on la multiplie par un nombre positif et on le change lorsqu'on la multiplie par un nombre négatif.

Supposons $a < 0$. Soient u et v deux réels quelconques tels que :

$$u < v$$

Les réels $v - u$ et a sont de signes opposés, donc :

$$a(v - u) < 0$$

En distribuant : $$av - au < 0$$

En ajoutant au : $$au > av$$

En ajoutant b : $$au + b > av + b$$

$$f(u) > f(v)$$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

<u>Signe d'une fonction affine</u>

Soit $f : x \longmapsto ax + b$ une fonction affine avec $a \neq 0$.

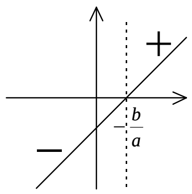
La fonction f s'annule en $-\dfrac{b}{a}$ et son signe est donné par les tableaux ci-dessous :

$\boxed{\text{Méthode générale}}$

Si a est strictement positif, alors :

$$ax + b \geqslant 0 \Leftrightarrow ax \geqslant -b \overset{a>0}{\Leftrightarrow} x \geqslant -\frac{b}{a}$$

La fonction affine $x \longmapsto ax + b$ est croissante

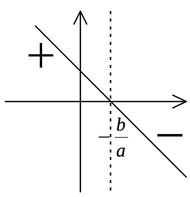


x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax + b$	$-$	0	$+$

Si a est strictement négatif, alors :

$$ax + b \geqslant 0 \Leftrightarrow ax \geqslant -b \overset{a<0}{\Leftrightarrow} x \leqslant -\frac{b}{a}$$

La fonction affine $x \longmapsto ax + b$ est décroissante



x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax + b$	$+$	0	$-$

Exemple : étudier le signe de la fonction affine $f : x \longmapsto 2x + 1$.

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$2x + 1$		$-$	0	$+$	

Par exemple, les solutions de l'inéquation $2x + 1 \geqslant 0$ sont les nombres de l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.