

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

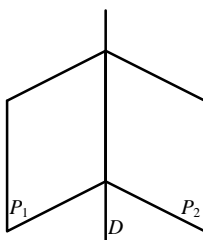
I) Règles de bases de la géométrie dans l'espace

Règle 1 : Il existe une et une seule droite de l'espace passant par deux points distincts.

Règle 2 : Il existe un et un seul plan de l'espace passant par trois points non alignés.

Théorème 1 : Si deux plans distincts ont un point commun, alors leur intersection est une droite.

Exemple : le livre ouvert :



Définition 1 : Quatre points (ou plus) appartenant à un même plan sont dits "coplanaires"

Deux droites (ou plus) incluses dans un même plan sont dites "coplanaires"

Règle 3 : Quand tous les éléments (points, droites, ...) d'un problème de l'espace sont coplanaires, toutes les règles de géométrie plane s'appliquent (Thalès, Pythagore, etc ...)

Problème : (servant d'exemple tout au long de la leçon)

$ABCD$ est un tétraèdre.

I est le milieu de $[AB]$,

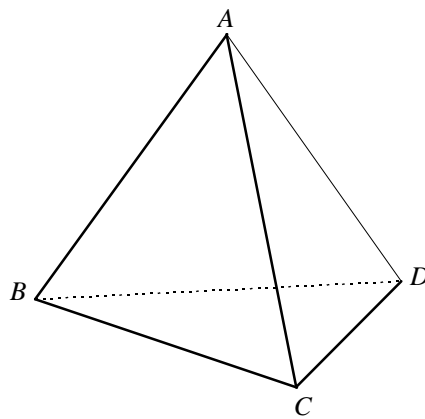
J est le milieu de $[AC]$,

K est le milieu de $[AD]$,

M est le milieu de $[BD]$,

N est le milieu de $[CD]$.

1. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (IJK) .
2. Démontrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.
3. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD) .
4. Démontrer que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.
5. Déterminer les droites D_1 et D_2 d'intersections des plans (ACM) et (BCD) puis (ACM) et (IJK) .
6. Démontrer que D_1 et D_2 sont parallèles.



Nous pouvons déjà répondre à la question 1 :

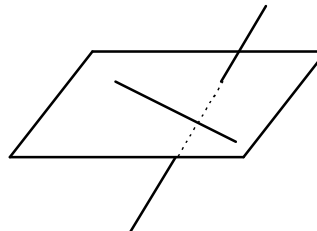
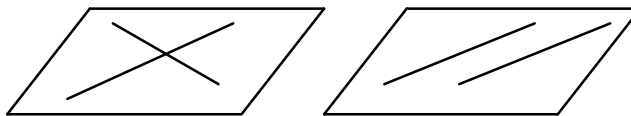
II) Positions relatives de 2 droites

Propriété 1 :

Deux droites de l'espace sont :

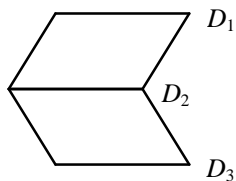
- soit coplanaires (elles sont alors sécantes ou parallèles)
- soit non coplanaires

ATTENTION : Dans l'espace, deux droites non parallèles ne sont pas nécessairement sécantes



Théorème 2 :

Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.



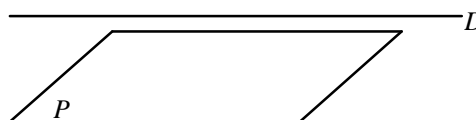
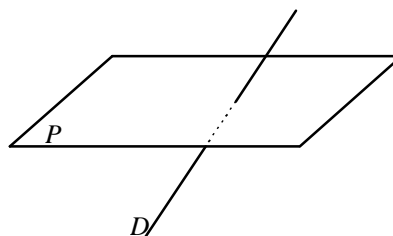
Exemple : solution de la question 2 :

III) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété 2 :

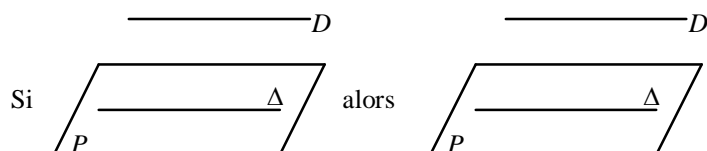
Une droite et un plan de l'espace sont :

- soit sécants
- soit parallèles



Théorème 3 :

Si une droite D est parallèle à une droite Δ d'un plan P , alors D est parallèle à P .



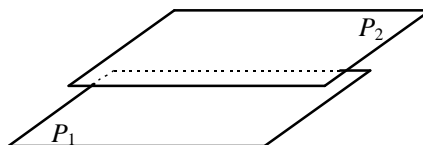
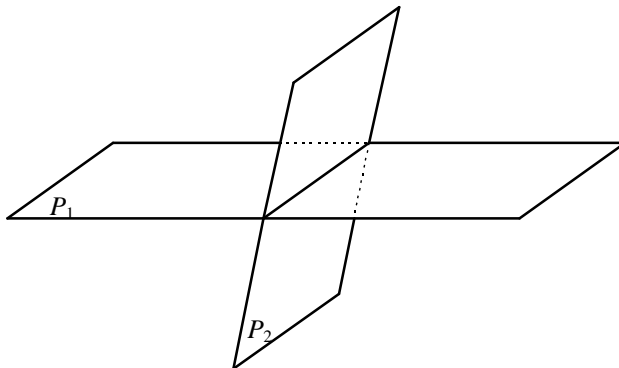
Exemple : solution de la question 3 :

IV) Positions relatives de 2 plans

Propriété 3 :

Deux plans de l'espace sont :

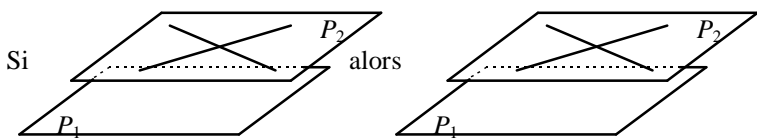
- soit sécants
- soit parallèles



Théorème 4 :

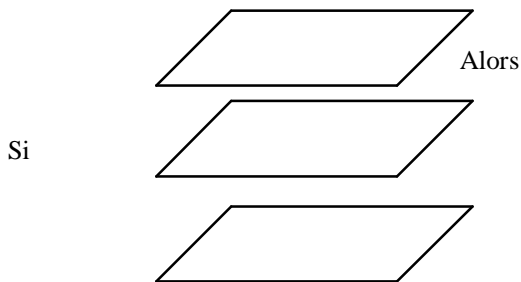
Si deux droites sécantes (d'un plan) sont parallèles à un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.

Exemple : solution de la question 4 :



Théorème 5 :

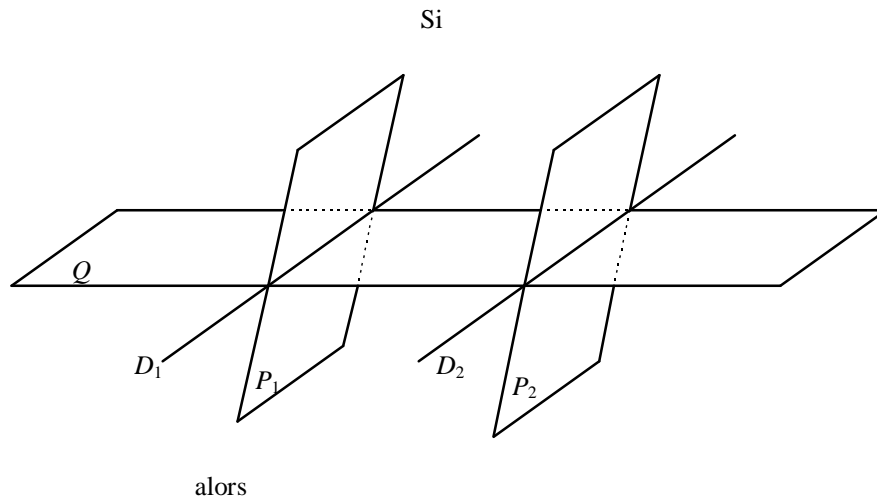
Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.



Solution de la question 5 :

Théorème 6 :

Un plan Q sécant à deux plans (strictement) parallèles P_1 et P_2 les coupe suivant deux droites parallèles (D_1 et D_2)



Exemple : solution de la question 6 :

Démonstration du théorème :

D_1 et D_2 sont deux droites coplanaires (dans le plan Q), donc D_1 et D_2 sont soit parallèles, soit sécantes.

Si elles sont sécantes, alors il existe un point $M (= D_1 \cap D_2)$ qui appartient à la fois à P_1 et P_2 , ce qui est absurde puisque P_1 et P_2 sont strictement parallèles.

Donc D_1 et D_2 sont parallèles.