

POURCENTAGES

Notation : le symbole % n'est pas une unité (comme le cm) mais une **notation** signifiant "divisé par 100".

Par exemple 15% est égal au nombre 0,15.

1. Pourcentages : 3 situations de référence

	Situation	Application linéaire associée	Exemple-clé
1	Prendre t % d'une quantité x	$x \mapsto \frac{t}{100}x$	12 % de x , c'est $0,12x$
2	Augmenter une quantité x de t %	$x \mapsto \left(1 + \frac{t}{100}\right)x$	Si x augmente de 12 %, alors x devient $1,12x$
3	Diminuer une quantité x de t %	$x \mapsto \left(1 - \frac{t}{100}\right)x$	Si x diminue de 12 %, alors x devient $0,88x$

Exemples :

Une voiture coûte 15000 euros hors taxe. Calculer le prix toute taxe comprise de cette voiture sachant que le taux de T.V.A. (taxe sur la valeur ajoutée) est de 19,6 %.

Calculons le montant en euros de la T.V.A. :

Nous devons donc calculer 19,6 % d'une quantité, comme dans la situation 1 :

$$\frac{19,6}{100} \times 15000 = 0,196 \times 15000 = 2940 \text{ €}$$

Le prix T.T.C. de cette voiture est donc $15000 + 2940 = 17940 \text{ €}$.

Mais on aurait pu trouver directement ce résultat à l'aide de la situation 2 :

On augmente le prix hors taxe de 19,6 %, ce qui donne :

$$\left(1 + \frac{19,6}{100}\right) \times 15000 = 1,196 \times 15000 = 17940 \text{ €}$$

Le lundi 7 Octobre 1991, la radio Zaïroise annonçait une augmentation de 900 % des salaires des fonctionnaires du pays. Par quel nombre ces salaires ont-ils été multipliés ?

Soit x le montant d'un salaire avant la hausse. On est dans la situation 2, donc après la hausse ce salaire est de :

$$\left(1 + \frac{900}{100}\right)x = (1 + 9)x = 10x$$

Donc les salaires ont été multipliés par 10.

Remarque : augmenter de 100 % correspond à "doubler", augmenter de 200 % correspond à "tripler", augmenter de 300 % correspond à multiplier par 4, etc...

Le prix d'un C.D. baisse de 8 % la première année, puis de 6 % la seconde. De quel pourcentage aura baissé le prix de ce disque en deux ans ?

Soit P_0 le prix initial du C.D. Soient P_1 et P_2 les prix respectifs du C.D. au bout d'un an et de deux ans.

Nous sommes dans la situation 3 :

$$P_1 = \left(1 - \frac{8}{100}\right) P_0 = 0,92P_0 \text{ et } P_2 = \left(1 - \frac{6}{100}\right) P_1 = 0,94P_1 = 0,94 \times 0,92P_0 = 0,8648P_0$$

Par exemple, si le disque vaut initialement $P_0 = 20$ euros, il vaut $P_1 = 0,92 \times 20 = 18,4$ euros au bout d'un an et $P_2 = 0,94 \times 18,4 \approx 17,30$ euros au bout de deux ans.

Quel a été le pourcentage de baisse ? Puisqu'on a $P_2 = 0,8648 P_0$, on peut écrire :

$$P_2 = \left(1 - \frac{13,52}{100}\right) P_0, \text{ donc la baisse est de } 13,52 \% \text{ en deux ans.}$$

Une deuxième méthode consiste à utiliser la formule suivante qui donne directement le pourcentage d'évolution :

$\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$
--

Ce qui, appliqué à notre exemple, donne : $\frac{0,8648P_0 - P_0}{P_0} = \frac{0,8648 - 1}{1} = -0,1352$.

On obtient un nombre négatif, donc c'est une baisse de 13,52 %.

Démonstration de la formule :

$\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$
--

Soit I une valeur initiale et F la valeur finale obtenue par variation d'un certain pourcentage t . On a donc :

$$F = \left(1 + \frac{t}{100}\right) I = I + \frac{t}{100} I$$

$$F - I = \frac{t}{100} I$$

$$\frac{t}{100} = \frac{F - I}{I}$$

Si le pourcentage t obtenu est négatif, on a une baisse, et s'il est positif, on a une augmentation.

2. Pourcentages : quelques pièges à éviter

	Piège à éviter	Exemple
1	Une baisse de t % n'est pas compensée par une hausse de t %	Un objet à 100 euros qui baisse de 10 % coûte 90 euros, puis s'il augmente de 10 %, il coûte 99 euros.
2	Une variation de t_1 % suivie d'une variation de t_2 % n'est pas égale à une variation de $(t_1 + t_2)$ %	Un objet à 100 euros qui baisse de 10 % coûte 90 euros. S'il baisse encore de 10 %, il coûte 81 euros. Il n'a donc pas baissé de 20 % (il coûterait 80 euros)

Exemples :

En 1970 une ville comptait 50000 habitants. Entre 1970 et 1980, cette ville a perdu 5 % de sa population. Entre 1980 et 1990, la ville regagne 5% d'habitants. Quel est le nombre d'habitants de cette ville en 1980 et en 1990 ? Quel est, en pourcentage, la variation du nombre d'habitants de cette ville entre 1970 et 1990 ?

$$\text{Nombre d'habitants en 1980 : } \left(1 - \frac{5}{100}\right) 50000 = 0,95 \times 50000 = 47500.$$

$$\text{Nombre d'habitants en 1990 : } \left(1 + \frac{5}{100}\right) 47500 = 1,05 \times 47500 = 49875.$$

$$\text{Variation, en pourcentage, du nombre d'habitants entre 1970 et 1990 : } \frac{49875 - 50000}{50000} = -0,0025.$$

Globalement, le nombre d'habitants a baissé de 0,25 % entre 1970 et 1990.

Les impôts : pour calculer le montant imposable, le fisc applique une déduction forfaitaire de 20 %, puis une déduction supplémentaire de 10 %. Calculer le montant imposable pour un revenu (annuel) de 20000 euros. Quel est le taux de déduction global ?

Montant imposable :

$$\left(1 - \frac{10}{100}\right) \left(1 - \frac{20}{100}\right) 20000 = 0,9 \times 0,8 \times 20000 = 14400 \text{ €}$$

Taux de déduction global :

$$\left(1 - \frac{10}{100}\right) \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 0,9 \times 0,8 = 0,72 = 1 - 0,28 = 1 - \frac{28}{100}$$

Soit une déduction de 28 %.

$$\text{Autre méthode : } \frac{108000 - 150000}{150000} = -0,28, \text{ c'est à dire déduction de 28 \%. (Et non 30 \% !)}$$

3. Pourcentages de pourcentages

À chaque pourcentage, on peut associer un coefficient : par exemple à 15 % correspond le coefficient 0,15.

Pour calculer des pourcentages de pourcentages, on multiplie les coefficients associés.

On dit parfois que les pourcentages se multiplient.

Exemples :

Dans une classe de 1^{ère} ES, 75 % des élèves sont des filles et 20 % des filles portent des lunettes. Quel est le pourcentage des filles qui portent des lunettes dans cette classe ?

Soit n le nombre d'élèves dans la classe. Il y a donc $\frac{75}{100}n$ filles dans la classe. Parmi ces $\frac{75}{100}n$ filles, 20 %

portent des lunettes, soit $\frac{20}{100} \frac{75}{100}n$ filles à lunettes. Ce qui donne $0,2 \times 0,75n = 0,15n = \frac{15}{100}n$.

Il y a donc 15 % d'élèves qui sont des filles qui portent des lunettes dans cette classe.

(Remarque : on peut se passer de n dans les calculs, il suffit de multiplier les coefficients 0,75 et 0,2)

1,20 % des hommes sur terre sont des Français, 0,405 % des Français sont des Jurassiens et 5,4 % des Jurassiens sont des Sanclaudiens. En estimant la population terrestre à 5 milliards de personnes, combien y a-t-il d'habitants à Saint-Claude ?

On multiplie tous les coefficients :

$$0,012 \times 0,00405 \times 0,054 = 2,6244 \times 10^{-6}$$

Appliquons ce coefficient à 5×10^9 , cela donne : $2,6244 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^9 = 13122$ Sanclaudiens.

4. Pourcentage moyen, pourcentage global

Imaginons qu'une quantité x varie d'un certain pourcentage t_1 durant une année puis d'un certain pourcentage t_2 l'année suivante. Deux questions naturelles se posent. Quel est le pourcentage global t_g d'évolution sur les deux années ? Quel est le pourcentage moyen annuel t_m d'évolution ?

Notons z la quantité après deux années, nous avons donc :

$$z = \left(1 + \frac{t_1}{100}\right) \left(1 + \frac{t_2}{100}\right) x$$

Posons $c_1 = \left(1 + \frac{t_1}{100}\right)$ et $c_2 = \left(1 + \frac{t_2}{100}\right)$. (Coefficients multiplicateurs associés à t_1 et t_2)

Le coefficient multiplicateur global est : $c_g = c_1 \times c_2$

On en déduit le pourcentage global :

$$t_g = 100(c_g - 1) = 100(c_1 c_2 - 1) = 100 \left[\left(1 + \frac{t_1}{100}\right) \left(1 + \frac{t_2}{100}\right) - 1 \right]$$

$$t_g = 100 \left(\frac{t_1 + t_2}{100} + \frac{t_1 t_2}{10000} \right) = t_1 + t_2 + \frac{t_1 t_2}{100}$$

Si c_m désigne le coefficient multiplicateur associé à t_m , on a :

$$c_m^2 = c_1 \times c_2$$

Il apparaît donc que c_m est la moyenne géométrique de c_1 et c_2 .

On a, en revenant aux pourcentages :

$$t_m = 100(c_m - 1) = 100(\sqrt{c_1 c_2} - 1)$$