

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I) Introduction, vocabulaire et notations

Une équation différentielle est une équation liant une fonction inconnue et certaines de ses dérivées. L'usage est de noter cette fonction y .

Exemples : trouver au moins une fonction solution sur \mathbb{R} des équations différentielles suivantes :

$$y' = \sin x \quad (y = -\cos x + k)$$

$$y' = 3y \quad (y = k e^{3x})$$

$$y' = 1 + e^x \quad (y = x + e^x + k)$$

$$y' = y \quad (y = k e^x)$$

$$y'' = \cos x \quad (y = -\cos x + k)$$

$$y'' = y \quad (y = A e^x + B e^{-x})$$

On appelle solution d'une équation différentielle (E) un couple (f, I) où f est une fonction et I un intervalle tels que f vérifie (E) sur I . Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I , c'est trouver toutes les fonctions solutions sur I . (Ce n'est pas toujours évident). À notre niveau, on aura presque toujours $I = \mathbb{R}$.

On distingue plusieurs types d'équations différentielles :

Les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants sans second membre : $y' + 5y = 0$

Les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants avec second membre : $y' + 5y = e^x$

Les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre : $2y'' - 3y' + 5y = 0$

Les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre : $2y'' - 3y' + 5y = \sin x$

Il existe aussi des équations différentielles à coefficients variables : $y'' + \sin x y' - e^x y = 0$

Ainsi que des équations différentielles non linéaires : $y'' \times y' - y = 0$.

Ces deux derniers types d'équation sont totalement hors programme !

II) Équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre : $y' + ay = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$

Théorème 1

Les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ ($a \in \mathbb{R}$) sont toutes les fonctions f définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = A e^{-ax} \text{ où } A \text{ est une constante quelconque}$$

Exemple : résoudre, sur \mathbb{R} , l'équation différentielle (E) suivante : $2y' - 3y = 0$.

L'équation (E) est équivalente à $y' - \frac{3}{2}y = 0$. D'après le théorème (avec $a = -\frac{3}{2}$). L'ensemble des solutions de

(E) est constitué des fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = A e^{-\frac{3}{2}x}$.

Démonstration :

Vérifions que les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = A e^{-ax}$ sont solutions de l'équation différentielle sur \mathbb{R} :

Comme $f'(x) = -aAe^{-ax}$, on a : $f'(x) + af(x) = -aAe^{-ax} + aAe^{-ax} = 0$.

Montrons que ce sont les seules solutions (sur \mathbb{R}) : pour cela, on considère une solution quelconque f (sur \mathbb{R}) de l'équation différentielle. La fonction f est donc nécessairement dérivable sur \mathbb{R} et on a : $f' + af = 0$.

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $z(x) = f(x) e^{ax}$. La fonction z est dérivable (puisque f l'est) et on a :

$$z'(x) = f'(x) e^{ax} + af(x) e^{ax} = (f'(x) + af(x))e^{ax} = 0 \text{ puisque } f' + af = 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Donc la fonction z est constante sur \mathbb{R} : $z(x) = A$.

$$\text{D'où } f(x) = z(x)e^{-ax} = Ae^{-ax}.$$

Remarques :

- La constante A peut être nulle. On obtient la solution "nulle" : $f = 0$ sur \mathbb{R} qui est une solution évidente de l'équation différentielle.
- On a démontré que si f_0 est une solution non identiquement nulle (sur \mathbb{R}) de l'équation différentielle, toutes les autres solutions f sur \mathbb{R} sont des multiples de f_0 .

Théorème 2

L'équation différentielle $y' + ay = 0$ ($a \in \mathbb{R}$) admet une unique solution f sur \mathbb{R} satisfaisant la condition initiale $f(x_0) = y_0$. Cette solution f est définie par : $f(x) = y_0 e^{-a(x-x_0)}$.

(Formule à oublier ; voir l'exemple)

Démonstration :

On a vu que les solutions f sur \mathbb{R} sont de la forme : $f(x) = A e^{-ax}$

La condition $f(x_0) = y_0$ impose $A = y_0 e^{ax_0}$.

Il n'y a donc qu'une seule valeur possible pour la constante A et $f(x) = y_0 e^{-a(x-x_0)}$.

Exemple : on considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = 0$. Déterminer l'unique solution f sur \mathbb{R} de (E) dont la représentation graphique passe par le point J de coordonnées (0 ; 1).

Les solutions générales sur \mathbb{R} de (E) sont : $f(x) = Ae^x$. Puis on détermine la constante : $f(0) = 1$, d'où $A = 1$.

La fonction recherchée est la fonction exponentielle.

III) Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre :

$$\mathbf{y'' + ay' + by = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})}$$

Dans tout ce qui suit, nous noterons (E) l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$. ($a, b \in \mathbb{R}$)

Théorème 3

Soit I un intervalle.

1. Soient f_1 et f_2 deux solutions sur I de l'équation différentielle (E). Alors les fonctions de la forme $Af_1 + Bf_2$ sont également des solutions sur I de (E).
2. Si f_1 et f_2 sont des solutions sur I non nulles sur I et non liées⁽¹⁾ sur I , alors les solutions sur I de l'équation différentielle (E) sont toutes de la forme $Af_1 + Bf_2$.

⁽¹⁾ f_1 et f_2 non liées sur I signifie : il n'existe pas de réel k tel que $f_2 = k f_1$ sur I . (On dit en fait "linéairement indépendantes")

Démonstration :

1. Évident, on utilise la linéarité de la dérivation ($(u + v)' = u' + v'$ et $(ku)' = ku'$)
2. Beaucoup moins évident et indispensable pour la suite :

Soit f une solution quelconque de (E) sur I . Nous allons montrer qu'il existe des constantes A et B telles que :

$$f = Af_1 + Bf_2 \text{ (et donc telles que } f' = Af_1' + Bf_2')$$

Pour cela, montrons que le système suivant (d'inconnues A et B) admet une unique solution :

$$\begin{cases} Af_1 + Bf_2 = f & \text{sur } I \\ Af_1' + Bf_2' = f' & \text{sur } I \end{cases}$$

Les vecteurs directeurs (des variétés affines correspondantes) sont $\vec{u}(-f_2; f_1)$ et $\vec{v}(-f_2'; f_1')$.

Nous allons montrer que ces deux vecteurs sont non colinéaires, pour tout $t \in I$.

Supposons le contraire : il existe $t_0 \in I$ tel que $(f_1 f_2' - f_2 f_1')(t_0) = 0$.

Notons $W = f_1 f_2' - f_2 f_1'$

En dérivant, on obtient : $W' = f_1' f_2' + f_1 f_2'' - f_2' f_1' - f_2 f_1''$

Or, nous savons que : $f_1'' + a f_1' + b f_1 = 0$ et $f_2'' + a f_2' + b f_2 = 0$.

Nous obtenons alors : $W' = f_1' f_2' + f_1(-a f_2' - b f_2) - f_2' f_1' - f_2(-a f_1' - b f_1)$

$$W' = -a(f_1 f_2' - f_2 f_1') = -aW$$

Donc, d'après le théorème 1 : $W(t) = K e^{-at}$ pour tout $t \in I$

Et comme $W(t_0) = 0$, on a $K = 0$ d'où : $W(t) = 0$ pour tout $t \in I$

On a donc $f_1 f_2' - f_2 f_1' = 0$ sur I .

Dans ce cas, le système homogène :

$$\begin{cases} Af_1 + Bf_2 = 0 & \text{sur } I \\ Af_1' + Bf_2' = 0 & \text{sur } I \end{cases}$$

ne serait pas de Cramer. Donc (comme il admet la solution triviale $(A; B) = (0; 0)$) il admet une infinité de solutions. Par conséquent, il existe un couple solution $(A; B) \neq (0; 0)$ tel que $Af_1 + Bf_2 = 0$ sur I . Autrement

dit, f_1 et f_2 sont liées sur I ($f_2 = -\frac{A}{B} f_1$ sur I si $B \neq 0$ ou $f_1 = 0$ sur I si $B = 0$). Ce qui contredit l'hypothèse.

Donc le système $\begin{cases} Af_1 + Bf_2 = f & \text{sur } I \\ Af_1' + Bf_2' = f' & \text{sur } I \end{cases}$ est de Cramer ; il admet une unique solution.

Donc toute solution f de (E) sur I est de la forme $f = Af_1 + Bf_2$.

Théorème 4

Soit λ un nombre complexe.

La fonction f à valeurs dans \mathbb{C} définie sur \mathbb{R} , par $f(x) = e^{\lambda x}$ est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$.

Démonstration :

Posons $\lambda = \alpha + i\beta$, on a $f(x) = e^{i\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))$. En utilisant le concept de linéarité de la dérivation ainsi que la relation $(uv)' = u'v + uv'$ étendus à \mathbb{C} , on peut écrire :

$$f'(x) = \alpha e^{i\alpha}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) + e^{i\alpha}(-\beta \sin(\beta x) + i\beta \cos(\beta x)) = (\alpha + i\beta)e^{i\alpha}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) = \lambda e^{\lambda x}.$$

Définition 1

On appelle équation caractéristique associée à (E) l'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$.

Théorème 5

Soit λ un nombre complexe. Soit f la fonction à valeurs dans \mathbb{C} définie sur \mathbb{R} , par $f(x) = e^{\lambda x}$.

La fonction f est une solution de (E) si et seulement si λ est une solution de l'équation caractéristique de (E)

Démonstration :

On a : $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ et $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$. On a les équivalences suivantes :

$$f \text{ solution de (E)}$$

$$f'' + af' + bf = 0$$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

Et comme $e^{\lambda x} \neq 0$:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

λ est solution de l'équation caractéristique associée à (E)

Résolution de (E) (sur un intervalle I non réduit à un point)

1^{er} cas : l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2

D'après le théorème 6, on connaît donc deux solutions sur I : $g_1(x) = e^{r_1 x}$ et $g_2(x) = e^{r_2 x}$.

Les fonctions g_1 et g_2 sont non nulles (clair) et non liées (si elles l'étaient, il existerait un réel k tel que pour tout réel x de I : $e^{r_2 x} = k e^{r_1 x}$. D'où $k = e^{(r_2 - r_1)x}$ ce qui n'est pas une constante car $r_1 \neq r_2$)

D'après le théorème 3, les solutions de (E) sur I sont toutes les fonctions f définies par $f(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}$ où A et B sont des constantes quelconques.

Exemple : Résoudre sur \mathbb{R} : $y'' - y' - 2y = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$ soit $(r + 1)(r - 2) = 0$ d'où $f(x) = A e^{-x} + B e^{2x}$

2^{ème} cas : l'équation caractéristique admet une solution double $r = -\frac{a}{2}$. (Et d'après le produit des racines, $r^2 = b$)

D'après le théorème 6, on connaît donc une solution sur I : $g(x) = e^{rx}$. N'en connaissant pas d'autres à ce stade, le théorème 3 ne peut pas s'appliquer. Procédons comme pour les équations différentielles du premier ordre.

Considérons une solution f quelconque de (E). On a donc $f'' + af' + bf = 0$ sur I .

Posons $z(x) = f(x) e^{-rx}$ pour tout $x \in I$.

$$\text{On a : } z'(x) = f'(x) e^{-rx} - rf(x) e^{-rx} \text{ et } z''(x) = f''(x) e^{-rx} - rf'(x) e^{-rx} - rf'(x) e^{-rx} + r^2 f(x) e^{-rx}.$$

$$\text{D'où } z''(x) = e^{-rx} (f''(x) - 2rf'(x) + r^2 f(x)) = e^{-rx} (f''(x) + af'(x) + bf(x)) = 0.$$

Et donc $z'(x) = A$ et $z(x) = Ax + B$ pour tout $x \in I$.

Les solutions de (E) sur I sont donc toutes les fonctions f définies par $f(x) = (Ax + B) e^{rx}$ où $x \in I$.

Autre méthode : on vérifie aisément que la fonction g_2 définie par $g_2(x) = x e^{rx}$ est solution de (E). Il est également facile de vérifier que g et g_2 sont linéairement indépendantes. Le théorème 3 permet alors de conclure.

Exemple : Résoudre sur \mathbb{R} : $y'' - 4y' + 4y = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$ soit $(r - 2)^2 = 0$ d'où $f(x) = (Ax + B) e^{2x}$

3^{ème} cas : l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$.

D'après le théorème 6, on connaît donc deux solutions : $g_1(x) = e^{\lambda x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$ et $g_2(x) = e^{\bar{\lambda} x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$.

Le problème, ici, est que les fonctions g_1 et g_2 sont des fonctions à valeurs complexes. Or nous cherchons des solutions qui soient des fonctions à valeurs réelles. En voici deux :

$$g(x) = \frac{g_1(x) + g_2(x)}{2} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \text{ et } h(x) = \frac{g_1(x) - g_2(x)}{2i} = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

On sait aussi que la partie réelle et la partie imaginaire sont des quantités réelles, d'où l'idée d'écrire :
 $g(x) = \text{Im}(g_2(x))$ et $h(x) = \text{Re}(g_1(x))$

On vérifie facilement que g et h sont linéairement indépendantes sur \mathbb{R} .

D'après le théorème 3, les solutions de (E) sont toutes les fonctions f définies par :

$$f(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$$

Exemple : Résoudre sur \mathbb{R} : $y'' - 2y' + 5y = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$ d'où $\lambda = 1 + 2i$ et $\bar{\lambda} = 1 - 2i$ d'où $f(x) = e^x (A \cos(2x) + B \sin(2x))$

RÉSUMÉ

| Si l'équation caractéristique admet pour solutions : | Alors la forme générale des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est : |
|--|---|
| deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 | $f(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}$ |
| une racine réelle double r | $f(x) = (Ax + B) e^{rx}$ |
| deux racines complexes conjuguées $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ | $f(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$ |

Théorème 6 :

(E) admet une unique solution f sur \mathbb{R} satisfaisant aux conditions initiales $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_0'$.

Exemple de démonstration : dans le cas où l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes

La condition $f(x_0) = y_0$ s'écrit $A e^{r_1 x_0} + B e^{r_2 x_0} = y_0$. La condition $f'(x_0) = y_0'$ s'écrit $A r_1 e^{r_1 x_0} + B r_2 e^{r_2 x_0} = y_0'$.

Posons $\alpha = e^{r_1 x_0}$ et $\beta = e^{r_2 x_0}$. Nous avons le système :

$$\begin{cases} A\alpha + B\beta = y_0 \\ A r_1 \alpha + B r_2 \beta = y_0' \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution si et seulement si les vecteurs directeurs correspondants sont non colinéaires.

On a $\vec{u}(-\beta; \alpha)$ et $\vec{v}(-\beta r_2; \alpha r_1)$. La condition de colinéarité s'écrit : $-\beta \alpha r_1 + \beta r_2 \alpha = \alpha \beta (r_2 - r_1)$

Or $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ (une exponentielle n'est jamais nulle) et $r_2 \neq r_1$ (par hypothèse), d'où $\alpha \beta (r_2 - r_1) \neq 0$.

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} étant non colinéaires, le système admet un unique couple solution $(A; B)$.

Les autres cas sont analogues.

Remarque : il est indispensable d'avoir deux conditions du type $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_0'$ (ce qu'on appelle des conditions de Cauchy) pour s'assurer de l'unicité de la solution. Si tel n'est pas le cas, le nombre de solutions peut être très variable (de 0 à l'infini...)

Exemple 1 : résoudre sur \mathbb{R} : $y'' + \pi^2 y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. (Conditions de Cauchy)

L'équation caractéristique est $r^2 + \pi^2 = 0$ qui possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = i\pi$ et $r_2 = -i\pi$.

Les solutions sur \mathbb{R} sont les fonctions y définies par : $y(x) = A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x)$

En dérivant, on obtient : $y'(x) = -A\pi\sin(\pi x) + B\pi\cos(\pi x)$

Les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ nous donnent : $0 = A$ et $0 = B$.

Conformément au théorème 7, on a bien une unique solution $y = 0$.

Exemple 2 : résoudre sur \mathbb{R} : $y'' + \pi^2 y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y(1) = 0$. (Ce ne sont pas des conditions de Cauchy)

Comme précédemment, les solutions (s'il y en a) sont de la forme : $y(x) = A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x)$

La condition $y(0) = 0$ donne $0 = A$ et la condition $y(1) = 0$ donne $0 = -A$, donc $A = 0$.

Et il n'y a aucune contrainte sur la constante B , donc l'équation admet une infinité de solution de la forme : $y(x) = B\sin(\pi x)$.

Exemple 3 : résoudre sur \mathbb{R} : $y'' + \pi^2 y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$. (Ce ne sont pas des conditions de Cauchy)

Comme précédemment, les solutions (s'il y en a) sont de la forme : $y(x) = A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x)$

La condition $y(0) = 0$ donne $0 = A$ et la condition $y(1) = 1$ donne $-1 = A$, d'où une incompatibilité. L'équation donnée avec les conditions proposées n'admet donc pas de solution.

IV) Équations différentielles liées à des situations physiques :

$$y'' - \omega^2 y = 0 \text{ et } y'' + \omega^2 y = 0 \quad (\omega \in \mathbb{R}_+)$$

Le tableau ci-dessus livre immédiatement les solutions :

| Équation différentielle | Solutions |
|-------------------------|--|
| $y'' - \omega^2 y = 0$ | $f(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ |
| $y'' + \omega^2 y = 0$ | $f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ |

Exemples :

- Oscillateur harmonique (ressort) amorti sur support horizontal
- Circuit LC oscillant

V) Équations différentielles avec second membre

Étude d'exemples :

1^{er} ordre : $y' + y = x^2 + x$ (E)

- **Résolution de l'équation homogène associée (E_0)** : $y' + y = 0$.

D'après le théorème 1, $y = A e^{-x}$.

- **Recherche d'une solution particulière p** (souvent de la même nature que le second membre)

Soit p un polynôme du second degré : $p(x) = ax^2 + bx + c$. On a alors $p'(x) = 2ax + b$. Déterminons les coefficients a , b et c afin que p soit solution de (E) :

$$2ax + b + a x^2 + bx + c = x^2 + x$$

$$a = 1$$

$$2a + b = 1$$

$$b + c = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -1$$

$$c = 1$$

Une solution particulière p est donc définie par $p(x) = x^2 - x + 1$. On a donc $p'(x) + p(x) = x^2 + x$.

- **On montre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de (E_0) :**

On a les équivalences suivantes :

f est solution de (E)

$$f(x) + f'(x) = x^2 + x$$

$$f(x) + f'(x) = p'(x) + p(x)$$

$$(f - p)' + (f - p) = 0$$

$f - p$ solution de (E_0)

- **Conclusion :** $f(x) - p(x) = A e^{-x}$. D'où $f(x) = A e^{-x} + x^2 - x + 1$.

Il apparaît donc que les fonctions solutions f de l'équation (E) avec second membre sont la somme des solutions de l'équation homogène associée (E_0) et d'une solution particulière de (E) . Ceci sera une règle générale pour les équations différentielles **linéaires**.

2^{ème} ordre : $y'' + 2y' + y = \cos x$ (E)

- **Résolution de l'équation homogène associée (E_0) :** $y'' + 2y' + y = 0$.

Les solutions sont de la forme, $y = (Ax + B) e^{-x}$. (L'équation caractéristique a une solution double $r = -1$)

- **Recherche d'une solution particulière p** (souvent de la même nature que le second membre)

Soit p une fonction de la forme : $p(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$.

On a alors : $p'(x) = -\lambda \sin x + \mu \cos x$

$$p''(x) = -\lambda \cos x - \mu \sin x = -p(x)$$

Déterminons les coefficients λ et μ afin que p soit solution de (E) :

$$p''(x) + 2p'(x) + p(x) = \cos x$$

$$2p'(x) = \cos x$$

$$-2\lambda \sin x + 2\mu \cos x = \cos x$$

D'où : $\lambda = 0$ et $\mu = \frac{1}{2}$

Une solution particulière p est donc définie par $p(x) = \frac{1}{2} \sin x$. On a donc $p''(x) + 2p'(x) + p(x) = \cos x$.

- **On montre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de (E_0) :**

On a les équivalences suivantes :

f est solution de (E)

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = \cos x$$

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = p''(x) + 2p'(x) + p(x)$$

$$(f - p)'' + 2(f - p)' + (f - p) = 0$$

$f - p$ solution de (E_0)

- **Conclusion :** $f(x) - p(x) = (Ax + B) e^{-x}$. D'où $f(x) = (Ax + B) e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$.

Remarque : en cas de second membre composé, on applique le principe de "superposition" :

$$(E) : y'' - 5y' + 4y = x^2 + \cos x$$

Déjà, on résout $(E_1) : y'' - 5y' + 4y = x^2$.

On trouve :

$$y_1(x) = A_1 e^x + B_1 e^{4x} + \frac{1}{4} x^2 + \frac{5}{8} x + \frac{21}{32}$$

Ensuite, on résout $(E_2) : y'' - 5y' + 4y = x^2 + \cos x$

On trouve :

$$y_2(x) = A_2 e^x + B_2 e^{4x} + \frac{3}{34} \cos x - \frac{5}{34} \sin x$$

On ajoute y_1 et y_2 pour obtenir les solutions de (E) :

$$y(x) = A e^x + B e^{4x} + \frac{1}{4} x^2 + \frac{5}{8} x + \frac{21}{32} + \frac{3}{34} \cos x - \frac{5}{34} \sin x$$

VI) Complément 1 : résolution des équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre à coefficients variables sans second membre

Précisons clairement notre objectif :

Soit I un intervalle, $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Nous voulons résoudre sur I , l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E) : y'(x) + a(x)y(x) = 0 \quad (x \in I)$$

1. Existence de solutions

a) Soit A une primitive de a sur I . Vérifier que l'application :

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-A(x)} \end{aligned}$$

est une solution de (E) sur I .

b) Soit $k \in \mathbb{R}$. Montrer que les fonctions $f_k = kf$ sont aussi des solutions de (E) sur I .

2. Unicité des solutions (et plus précisément, les **seules** solutions de (E) sur I sont les fonctions f_k où $k \in \mathbb{R}$)

Soit φ une solution quelconque de (E) sur I . On pose : $z(x) = \varphi(x) e^{A(x)}$ pour tout $x \in I$.

Démontrer que z est constante sur I . En déduire qu'il existe un réel k tel que $\varphi = f_k$.

Détail des calculs :

1. La fonction f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, on a : $f'(x) = -a(x) e^{-A(x)}$.

a) On a : $f'(x) + a(x)f(x) = -a(x) e^{-A(x)} + a(x) e^{-A(x)} = 0$, donc f est bien une solution de (E) sur I .

b) C'est un cas particulier du théorème 3, mais l'énoncé incite à faire une démonstration :

Pour tout $x \in I$, on a : $f'_k(x) + a(x)f_k(x) = kf'(x) + a(x)kf(x) = k(f'(x) + a(x)f(x)) = 0$ car f est une solution.

Donc les fonctions f_k sont bien des solutions de (E) sur I .

2. La fonction z est dérivable sur I (puisque φ l'est en tant que solution de (E)) et on a :

$$z'(x) = \varphi'(x) e^{A(x)} + \varphi(x)a(x) e^{A(x)} = (\varphi'(x) + \varphi(x)a(x)) e^{A(x)} = 0 \text{ car } \varphi \text{ est une solution de } (E)$$

Donc z est constante sur I . Cela signifie :

$$\exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que : } z(x) = k \text{ pour tout } x \in I.$$

C'est-à-dire : (comme $z(x) = \varphi(x) e^{A(x)}$)

$$\exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \varphi(x) = k e^{-A(x)} = f_k(x) \text{ pour tout } x \in I.$$

VII) Complément 2 : résolution des équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre à coefficients variables avec second membre

Précisons clairement notre objectif :

Soient I un intervalle et a et b des applications continues de I dans \mathbb{R} .

Nous voulons résoudre sur I , l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E) : y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad (x \in I)$$

Existence d'une solution particulière : soit p la fonction définie sur I par :

$$p(x) = e^{-A(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt \quad \text{où } x_0 \in I$$

$$\text{On a : } p'(x) = -a(x) e^{-A(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt + e^{-A(x)} b(x) e^{A(x)} = -a(x) e^{-A(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt + b(x)$$

$$\text{D'où : } p'(x) + a(x)p(x) = b(x)$$

Donc p est bien une solution particulière de (E) sur I .

Recherche des solutions générales :

On a les équivalences suivantes :

Soit f une solution de (E) sur I

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x) \quad \text{pour tout } x \in I$$

$$f'(x) + a(x)f(x) = p'(x) + a(x)p(x) \quad \text{pour tout } x \in I$$

$$(f' - p') + a(x)(f - p) = 0$$

$$f - p \text{ est solution de } (E_h) : y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

Et d'après [VI] :

$$(f - p)(x) = k e^{-A(x)}$$

$$f(x) = k e^{-A(x)} + p(x)$$

$$f(x) = k e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt$$

$$f(x) = \frac{\int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt + k}{e^{A(x)}}$$