ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - MODÈLES D'ÉVOLUTION

1. Introduction - Notion d'équation différentielle - Solution d'une équation différentielle

Une équation différentielle est une équation :

- dont l'inconnue est une fonction (généralement notée y ou z ou autre lettre)
- dans laquelle apparaît certaines des dérivées de y (dérivée première y' ou dérivées d'ordre supérieur y'', ...).

Exemples : trouver mentalement, au moins une fonction solution sur $\mathbb{R}$, des équations différentielles suivantes :

On devrait, de manière plus cohérente noter l'équation différentielle $y'(x) = \sin x$ au lieu de $y' = \sin x$, mais la coutume a voulu, qu'exceptionnellement, on tolère de ne pas écrire la variable de la fonction inconnue...

$y' = \sin(x)$	$(y = -\cos(x) + k$ où $k \in \mathbb{R})$
$y' = 3y$	$(y = k\,\mathbf{e}^{3x}$ où $k \in \mathbb{R})$
$y' = 1 + \mathbf{e}^{x}$	$(y = x + \mathbf{e}^{x} + k$ où $k \in \mathbb{R})$
$y' = y$	$(y = k\,\mathbf{e}^{x}$ où $k \in \mathbb{R})$
$y'' = \cos(x)$	$(y = -\cos(x) + ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R})$
$y'' = y$	$(y = A\,\mathbf{e}^{x} + B\,\mathbf{e}^{-x}$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2)$

Remarques :

- Rechercher les primitives[1] d'une fonction continue f sur un intervalle I, c'est résoudre, sur I, l'équation différentielle : $$y' = f(x)$$
- La notion d'intervalle dans la résolution d'une équation différentielle est fondamentale. Si on change d'intervalle, on peut très bien obtenir d'autre solutions. Par exemple, si on se place sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{x}$ a pour solutions les fonctions $y : x \mapsto \ln(x) + K$ (K est une constante). Alors que sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, les solutions sont les fonctions $y : x \mapsto \ln(-x) + K$.

Il est donc nécessaire de bien définir ce qu'est une solution d'une équation différentielle.

1.1. Définition

On appelle solution d'une équation différentielle (E) un couple (f, I) où f est une fonction et I un intervalle tels que f vérifie (E) sur I. On dira : f est une solution de (E) **sur I**.

Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I, c'est trouver toutes les fonctions solutions de (E) sur I.

Si aucune précision n'est donnée sur l'intervalle I, on considérera qu'il s'agit de $I = \mathbb{R}$.

On distingue plusieurs types d'équations différentielles :

- Les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants sans second membre :
  exemple : $y' + 5y = 0$
- Les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants avec second membre :
  exemple : $y' + 5y = \mathbf{e}^{x}$
- Les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre :
  exemple : $2y'' - 3y' + 5y = 0$

[1] Voir la leçon sur le calcul intégral.

- Les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre :

$$\text{exemple : } 2y'' - 3y' + 5y = \sin(x)$$

- Il existe aussi des équations différentielles à coefficients variables :

$$\text{exemple : } y'' + \sin(x)\, y' - \mathbf{e}^x\, y = 0$$

- Ainsi que des équations différentielles non linéaires :

$$\text{exemple : } y'' \times y' - y = 0$$

1.2. Remarque :

Une équation différentielle (E) est dite linéaire lorsque son équation sans second membre associée (E_0) vérifie les deux assertions suivantes :

- pour toutes solutions f et g de (E_0) sur un intervalle I, la fonction $f + g$ est aussi solution de (E_0) sur I
- pour toute solution f de (E_0) sur I et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est aussi solution de (E_0) sur I

Exemples :

1. L'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$ est linéaire. En effet :
   - Soient f et g des solutions, sur un intervalle I, de l'équation sans second membre associée $(E_0) : y' = ay$.

     On a donc : $f' = af$ sur I

     $g' = ag$ sur I

     En ajoutant membre à membre, il vient, par linéarité de la dérivée :

     $$(f + g)' = a(f + g) \text{ sur } I$$

     Donc la fonction $f + g$ est aussi solution de (E_0) sur I.
   - Soient f une solution de (E_0) sur un intervalle I et λ un réel.

     On a donc : $f' = af$ sur I

     En multipliant par λ, on obtient : $(\lambda f)' = a(\lambda f)$ sur I

     Donc la fonction λf est aussi solution de (E_0) sur I.
2. L'équation différentielle $(E) : y' = y(1 - y)$ n'est pas linéaire. En effet, considérons une solution non nulle[(1)] y de (E) sur un intervalle I. Montrons que la fonction $z = 2y$ n'est pas solution de (E) sur I. Si elle l'était, on aurait : $z' = z(1 - z)$ sur I

   $$2y' = 2y(1 - 2y) \text{ sur } I$$

   Mais comme y est solution de (E) : $2y(1 - y) = 2y(1 - 2y)$ sur I

   Soit $x \in I$ tel que $y(x) \neq 0$ (existe par hypothèse). En simplifiant par $2y(x)$, il reste alors :

   $$1 - y(x) = 1 - 2y(x)$$

   $$y(x) = 2y(x)$$

   Et toujours en simplifiant par $y(x) \neq 0$, on aboutit à une absurdité.

   La fonction $z = 2y$ n'est donc pas solution de (E) sur I. L'équation (E) est non linéaire.

(1) On verra plus loin dans cette leçon que de telles solutions existent.

2. Équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants sans second membre $y' = ay$ ($a \in \mathbb{R}$)

2.1. Théorème

Soit a un réel. Soit (E) l'équation différentielle : $y' = ay$

Les solutions de (E), sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions y définies par :

$$y(x) = C\,\mathbf{e}^{ax} \quad \text{où } C \text{ est une constante quelconque}$$

L'équation différentielle (E) admet donc une infinité de solutions (puisque l'on a une infinité de choix de la constante C).

Démonstration :

1. On vérifie que les fonctions proposées sont bien solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

   Les fonctions $y : x \mapsto C\,\mathbf{e}^{ax}$ sont de la forme $y = C\,\mathbf{e}^{u}$ où $u(x) = ax$.

   Comme u est dérivable sur $\mathbb{R}$, y l'est aussi et : $y' = C\,u'\,\mathbf{e}^{u}$

   Ce qui donne, pour tout réel x : $y'(x) = a\,C\,\mathbf{e}^{ax} = ay(x)$

   D'où : $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$

   Donc les fonctions y proposées sont bien des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. (Ce qui prouve l'existence de solutions)

2. Montrons que les fonctions proposées sont **les seules** solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. (C'est-à-dire, qu'il n'y en a pas d'un autre type que $x \mapsto C\,\mathbf{e}^{ax}$). Soit y une solution quelconque de (E) sur $\mathbb{R}$. (On sait déjà que ça existe d'après le point 1). Considérons la fonction z définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

   $$z(x) = y(x)\,\mathbf{e}^{-ax}$$

   La fonction z est de la forme $z = uv$ avec $u = y$ et $v(x) = \mathbf{e}^{-ax}$.

   Comme les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction z l'est aussi et on a :

   $$z' = u'v + uv'$$

   D'où, pour tout réel x : $z'(x) = y'(x)\,\mathbf{e}^{-ax} - ay(x)\,\mathbf{e}^{-ax}$

   $$z'(x) = \mathbf{e}^{-ax}(y'(x) - ay(x))$$

   Mais, par hypothèse, y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, donc $y'(x) - ay(x) = 0$

   On en déduit que pour tout réel x : $z'(x) = 0$

   On en déduit que z est constante sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, il existe une constante C telle que pour tout réel x :

   $$z(x) = C$$

   $$y(x)\,\mathbf{e}^{-ax} = C$$

   $$y(x) = C\,\mathbf{e}^{ax}$$

   Ce qui démontre le théorème 2.1.

Remarques :

- La constante C peut être nulle. Dans ce cas, on obtient la solution "nulle" : $y = 0$ sur $\mathbb{R}$ qui est une solution évidente de l'équation différentielle.
- Le théorème 2.1. peut aussi s'interpréter ainsi : si f_0 est une solution non identiquement nulle (sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle (E), alors toutes les autres solutions f sur $\mathbb{R}$ sont des multiples de f_0.
- Le théorème 2.1. reste valable si a est un nombre complexe ; la démonstration reste la même en étendant le concept de dérivation à $\mathbb{C}$ (voir 7.2.). Cette extension du théorème 2.1. sera utile dans le paragraphe 7.

<u>Exemples</u> :

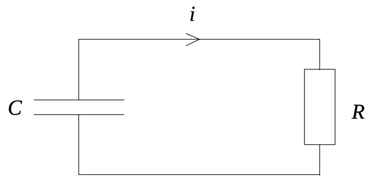
1. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $(E) : 3y' - 5y = 0$

   On écrit (E) sous la forme : $$y' = \frac{5}{3}y$$

   (E) est donc de la forme $y' = ay$ avec $a = \frac{5}{3}$. Ses solutions, sur $\mathbb{R}$, sont donc de la forme :

   $$y(x) = C\,\mathbf{e}^{\frac{5}{3}x} \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

2. Considérons un circuit électrique constitué d'un condensateur (de capacité C) se déchargeant dans une résistance R :



   D'après la loi d'additivité des tensions, on a : $u_C + u_R = 0$

   (u_C et u_R désignent respectivement la tension aux bornes du condensateur et de la résistance)

   Notons $i(t)$ l'intensité du courant électrique dans le circuit à l'instant t.

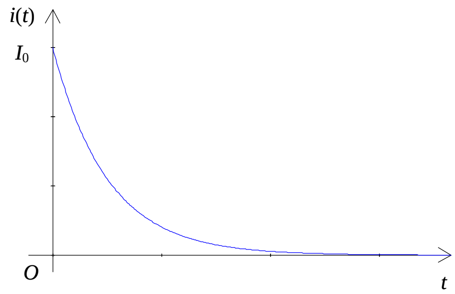
   On sait que : $$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{et} \quad u_R(t) = R\,i(t) = R\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$$

   D'où : $$q(t) = -RC\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$$

   C'est une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = -\frac{1}{RC}$ d'où :

   $$q(t) = K\,\mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad (K \in \mathbb{R})$$

   D'où, en dérivant : $$i(t) = I_0\,\mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad (I_0 \in \mathbb{R})$$



3. Dans un tissu radioactif, les lois de la Physique permettent d'affirmer que la vitesse de désintégration des noyaux radioactifs (à un instant t) est proportionnelle au nombre de noyaux radioactifs $N(t)$ présents dans le tissus à l'instant t. Il existe donc une constante λ strictement positive telle que :

   $$N'(t) = -\lambda N(t)$$

   > Le signe "–" de cette relation traduit la décroissance du nombre de noyaux.

   Si N_0 désigne le nombre de noyaux à l'instant initial, on a donc :

   $$N(t) = N_0\,\mathbf{e}^{-\lambda t}$$

   Dans ce contexte, apparaissent souvent deux grandeurs qu'il est bon de savoir interpréter graphiquement :

   - le <u>temps caractéristique</u>, noté τ, est défini par :

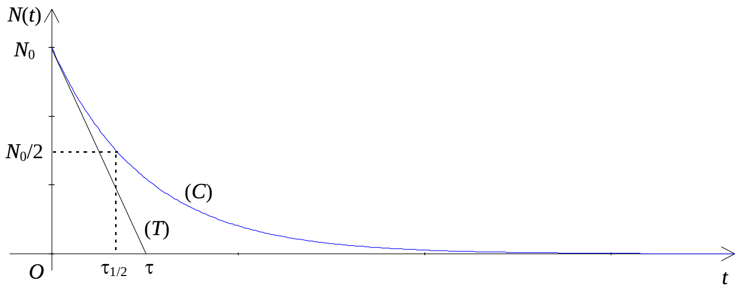
     $$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

     Si (T) désigne la tangente à l'origine de la courbe (C) de la fonction N, le temps caractéristique τ est l'abscisse du point d'intersection de la droite (T) avec l'axe du temps. En effet, une équation de (T) est :

     $$y = N'(0)t + N(0) = -\lambda N_0 t + N_0$$

     On constate que si $t = \tau$, on a bien : $y = 0$

     Plus le temps caractéristique est petit, plus la vitesse de désintégration initiale est élevée.



- la <u>période de demi-vie</u>, notée $\tau_{1/2}$ (ou T) qui est la période au bout de laquelle la moitié des noyaux se sont désintégrés. On a donc :

$$N(\tau_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$$

$$N_0\,\mathbf{e}^{-\lambda\tau_{1/2}} = \frac{N_0}{2}$$

D'où :

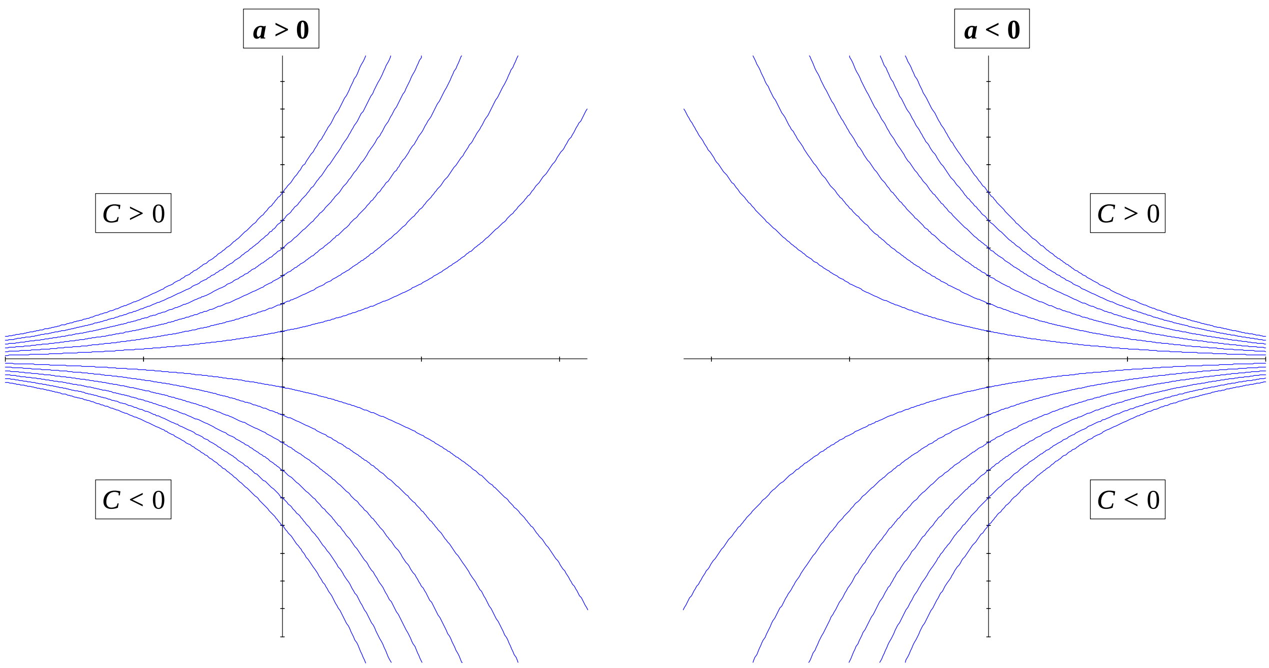
$$\lambda\tau_{1/2} = \ln(2)$$

$$\tau_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \tau\,\ln(2)$$

On peut alors exprimer $N(t)$ en fonction de la période de demi-vie :

$$N(t) = N_0\,\mathbf{e}^{-\lambda t} = N_0\,\mathbf{e}^{-\frac{t}{\tau}} = N_0\,\mathbf{e}^{-\frac{t}{\tau_{1/2}}\ln 2} = N_0\,2^{-\frac{t}{\tau_{1/2}}}$$

<u>2.2. Allure des solutions</u> :



On constate que toutes les solutions ont une limite nulle en $-\infty$ (lorsque $a > 0$) ou en $+\infty$ (lorsque $a < 0$) :

$$\lim_{x\to-\infty} C\,\mathbf{e}^{ax} = 0 \text{ lorsque } a > 0 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to+\infty} C\,\mathbf{e}^{ax} = 0 \text{ lorsque } a < 0$$

<u>Cas particulier</u> : si $a = 0$, l'équation différentielle est $y' = 0$ et ses solutions sont les fonctions constantes.

3. Équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre constant $y' = ay + b$ ($a \neq 0$)

3.1. Théorème

Soient a et b deux réels avec a non nul.

Soit (E) l'équation différentielle : $y' = ay + b$

Les solutions de (E), sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions y définies par :

$$y(x) = C\,\mathbf{e}^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{où } C \text{ est une constante quelconque}$$

Dans certains ouvrages, cette équation différentielle est notée :

$y' - ay = b$

ou : $y' + ay = b$

(de façon à bien isoler le second membre)

Attention, dans le dernier cas, le rôle de a est opposé.

Démonstration :

Nous remarquons que la fonction p, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$p = -\frac{b}{a}$$

est une solution particulière de (E).

(En effet, on a $p' = 0 = ap + b$)

Soit y une solution quelconque de (E). (On sait qu'il en existe au moins une : p)

On a, sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} y' = ay + b \\ p' = ap + b \end{cases}$

En retranchant membre à membre : $(y - p)' = a(y - p)$

Donc $y - p$ est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$, d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) - p(x) = C\,\mathbf{e}^{ax} \quad \text{où } C \text{ est une constante}$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $y(x) = C\,\mathbf{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$

La technique utilisée ci-contre est à connaître. Elle servira dans de nombreuses situations :

1) On détermine une solution particulière p de l'équation (E). (L'énoncé donne souvent les indications nécessaires).

2) On montre qu'une fonction y est solution de (E) si et seulement si la fonction $(y - p)$ est solution de l'équation sans second membre associée (E_0).

3) Comme, en général, on connaît les solutions de l'équation sans second membre associée, on en déduit que les solutions y de (E) s'écrivent comme la somme des solutions de (E_0) et de la solution particulière p.

Exemples :

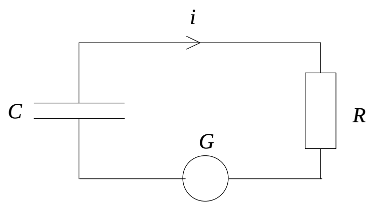
1. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E) : $\sqrt{2}\,y' - 2y = 1$

   On écrit (E) sous la forme : $y' = \sqrt{2}\,y + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   (E) est donc de la forme $y' = ay + b$ avec $a = \sqrt{2}$ et $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ses solutions, sur $\mathbb{R}$, sont donc de la forme :

$$y(x) = C\,\mathbf{e}^{\sqrt{2}x} - \frac{1}{2} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

2. Considérons un circuit électrique constitué d'un générateur G (délivrant une tension E), d'un condensateur (de capacité C) et d'une résistance R :



D'après la loi d'additivité des tensions, on a : $u_C + u_R = u_G = E$

Notons $i(t)$ l'intensité du courant électrique dans le circuit à l'instant t.

On sait que : $$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{et} \quad u_R(t) = R\, i(t) = R\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$$

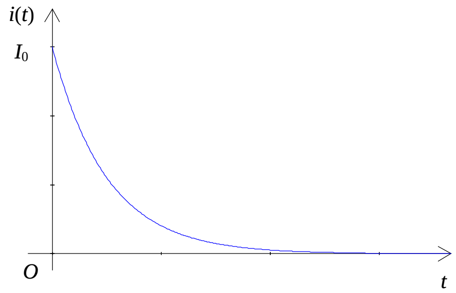
D'où : $$q(t) = EC - RC\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}q(t) + \frac{E}{R}$$

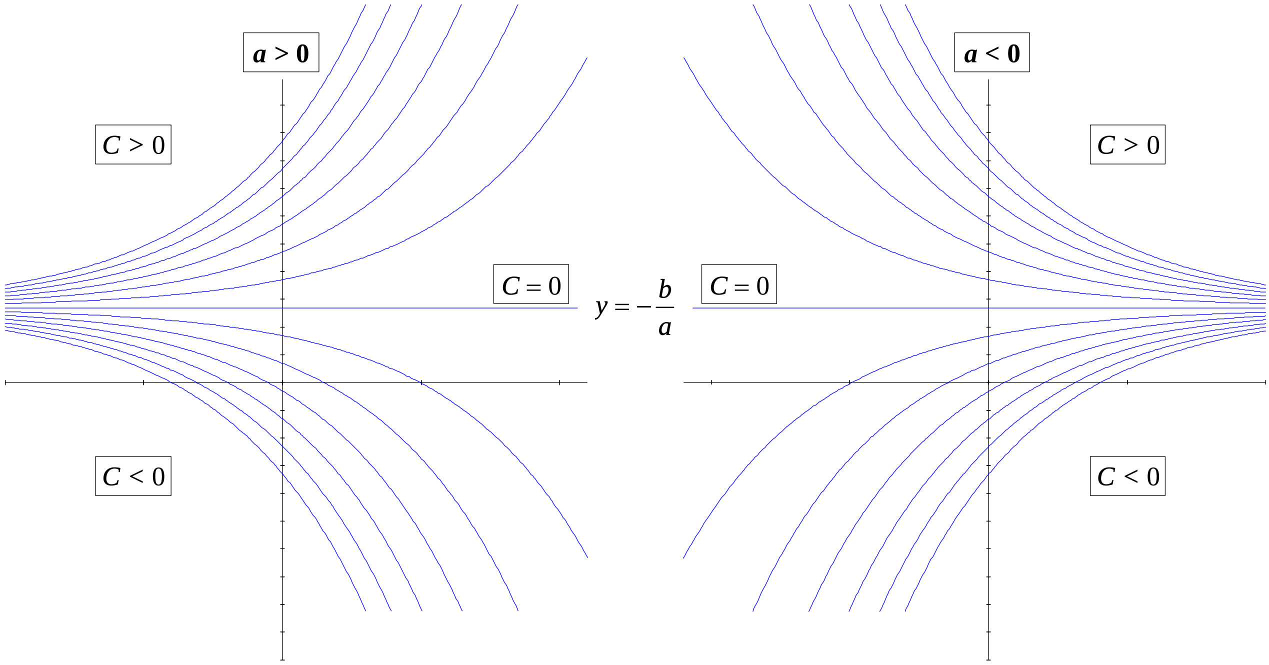
C'est une équation différentielle du type $y' = ay + b$ avec $a = -\dfrac{1}{RC}$ et $b = \dfrac{E}{R}$ d'où :

$$q(t) = K\,\mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}} + EC$$

En dérivant : $$i(t) = I_0\,\mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}}$$



3.2. Allure des solutions :



On constate que toutes les solutions ont la même limite en $-\infty$ (lorsque $a > 0$) ou en $+\infty$ (lorsque $a < 0$) :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(C\mathbf{e}^{ax} - \frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{a} \quad \text{lorsque } a > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(C\mathbf{e}^{ax} - \frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{a} \quad \text{lorsque } a < 0$$

Cas particuliers :

- si $a = 0$, alors l'équation différentielle (E) se réduit simplement à $y' = b$ dont les solutions sont les fonctions affines $x \longmapsto bx + C$ où C est une constante.
- si $b = 0$, on est ramené au cas de la situation du paragraphe 2.

4. Équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre variable

On s'intéresse, dans ce paragraphe, aux équations différentielles (E) du type :

$$(E) : y' - ay = f \quad \text{où } \boldsymbol{a} \in \mathbb{R} \text{ et } \boldsymbol{f} \textbf{ est une fonction}$$

4.1. Théorème

Soient a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.

Soit (E) l'équation différentielle : $\quad y' - ay = f$

Soit (E_0) l'équation différentielle sans second membre associée :

$$y' = ay$$

Soit p une solution particulière de (E), sur I : $\quad p' - ap = f$ sur I

La question générale de l'existence d'une solution particulière est hors programme (voir §9)

Alors les solutions y de (E), sur I, s'obtiennent en ajoutant les solutions de (E_0) avec p :

$$y(x) = C\,\mathbf{e}^{ax} + p$$

Démonstration :

On a les équivalences suivantes :

$$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I$$

$$y' - ay = f \text{ sur } I$$

$$y' - ay = p' - ap \text{ sur } I$$

$$(y - p)' = a(y - p) \text{ sur } I$$

$$y - p \text{ solution de } (E_0) \text{ sur } I$$

$$y(x) = C\,\mathbf{e}^{ax} + p(x) \text{ pour tout } x \in I$$

Le théorème 4.1. n'est pas explicitement au programme. Dans la pratique, les exercices demandent que les équivalences ci-contre soient redémontrées.

Exemple : résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E) :

$$y' + y = x^2 + x$$

- **Résolution de l'équation sans second membre associée**

$$(E_0) : y' + y = 0.$$

D'après le théorème 2.1 : $\quad y(x) = C\,\mathbf{e}^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$

- **Recherche d'une solution particulière $\boldsymbol{p}$** (souvent de la même nature que le second membre)

Soit p une fonction polynôme du second degré :

$$p(x) = a\,x^2 + bx + c$$

On a alors, pour tout réel x : $\quad p'(x) = 2ax + b$

Déterminons les coefficients a, b et c afin que p soit solution de (E) :

$$2ax + b + a\,x^2 + bx + c = x^2 + x$$

$$a\,x^2 + (b + 2a)x + c + b = x^2 + x$$

$$a = 1 \qquad 2a + b = 1 \qquad b + c = 0$$

$$a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = 1$$

Une solution particulière p est donc définie par :

$$p(x) = x^2 - x + 1$$

On a donc : $\quad p'(x) + p(x) = x^2 + x$

- **On montre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de (E_0)** :

  On a les équivalences suivantes :

$$f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f(x) + f'(x) = x^2 + x \text{ pour tout réel } x$$

$$f(x) + f'(x) = p'(x) + p(x) \text{ pour tout réel } x$$

$$(f - p)' + (f - p) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f - p \text{ solution de } (E_0)$$

$$f(x) - p(x) = C\,\mathbf{e}^{-x} \text{ pour tout réel } x$$

$$f(x) = C\,\mathbf{e}^{-x} + x^2 - x + 1 \text{ pour tout réel } x$$

RETENIR CE PRINCIPE :

Les fonctions solutions f de l'équation (E) avec second membre sont la somme des solutions de l'équation sans second membre associée (E_0) et d'une solution particulière de (E). Ceci sera une règle générale pour les équations différentielles **linéaires**.

5. Théorème de "Cauchy-Lipschitz" pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1, à coefficients constants et avec second membre

5.1. Théorème

Soient a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.

Soit (E) l'équation différentielle : $y' - ay = f$

On suppose que l'on connaît une solution particulière p de (E).

Soient x_0 et y_0 deux réels.

Il existe une unique solution, sur I, au problème différentiel (P) $\begin{cases} (E) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

La condition $y(x_0) = y_0$ s'appelle "condition initiale".

Démonstration :

On a vu que les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = C\,\mathbf{e}^{ax} + p(x) \text{ pour tout } x \in I$$

La condition initiale $y(x_0) = y_0$ s'écrit : $C\,\mathbf{e}^{ax_0} + p(x_0) = y_0$

D'où un unique choix pour la constante C : $C = \mathbf{e}^{-ax_0}\,(y_0 - p(x_0))$

Finalement, l'unique solution y au problème différentiel (P) est la fonction définie pour $x \in I$ par :

$$y(x) = (y_0 - p(x_0))\,\mathbf{e}^{a(x - x_0)} + p(x)$$

Exemples :

1. On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = \mathbf{e}^x$

   Rechercher une solution particulière p de la forme $p(x) = \lambda\,\mathbf{e}^x$ où λ est un réel que l'on calculera.

   Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation (E) munie de la condition initiale $y(0) = 0$.

Solution :

La fonction p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$p'(x) = \lambda\,\mathbf{e}^x$$

En remplaçant dans (E): $\quad -\lambda\,\mathbf{e}^x = \mathbf{e}^x$

D'où : $\quad \lambda = -1$

Une solution particulière p de (E) est : $\quad p(x) = -\,\mathbf{e}^x$

Les solutions de l'équation différentielle sans second membre associée (E_0) : $y' - 2y = 0$ sont :

$$x \longmapsto C\,\mathbf{e}^{2x}$$

D'où les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$: $\quad y(x) = C\,\mathbf{e}^{2x} - \mathbf{e}^x$

Enfin, la condition initiale $y(0) = 0$ donne : $\quad C - 1 = 0$

$$C = 1$$

Finalement, la solution recherchée est : $\quad y(x) = \mathbf{e}^{2x} - \mathbf{e}^x$

2. Reprenons le circuit électrique vu au paragraphe 3. On avait :

$$i(t) = I_0\,\mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

Supposons qu'à l'instant $t = 0$, le courant dans le circuit soit égal à $i(0) = 10$ mA

On a alors $I_0 = 10$ et : $\quad i(t) = 10\,\mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}}$

6. Autres types d'équations différentielles

6.1. Loi logistique continue. Modèle de Verhulst

On s'intéresse, dans ce paragraphe, aux équations différentielles (E) du type :

$$(E) : y' = ay(M - y) \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ et } M \in \mathbb{R}_+$$

Remarque : on a vu (en 1.) que cette équation différentielle est non linéaire.

Ce type d'équation différentielle apparaît souvent dans la pratique lors de l'étude de problèmes d'évolution. La fonction inconnue y représente alors une proportion. C'est donc une quantité positive.

Ici, nous n'allons pas résoudre (E) mais seulement **rechercher des solutions y qui vérifient $y > 0$ sur un intervalle I**.

La méthode est la suivante :

1. Supposons qu'il existe une solution y de (E) sur I telle que $y > 0$ sur I

On pose alors, pour tout $x \in I$: $\quad z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$

On dit que l'on effectue un "changement de fonction".

(Possible car y est supposée ne pas s'annuler sur I)

La fonction z est dérivable sur I (car y est dérivable et strictement positive sur I) et :

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = \frac{ay(y-M)}{y^2} = a - \frac{aM}{y} = a - aMz$$

On reconnaît ici une équation différentielle linaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre constant.

2. On en déduit que pour tout $x \in I$:

$$z(x) = C\,\mathbf{e}^{-aMx} + \frac{1}{M} \quad \text{où } C \text{ est une constante}$$

D'où : $$y(x) = \frac{1}{C\mathrm{e}^{-aMx} + \frac{1}{M}} = \frac{M}{MC\mathrm{e}^{-aMx} + 1}$$

Et en posant $b = MC$: $$y(x) = \frac{M}{b\mathrm{e}^{-aMx} + 1}$$

Cette fonction est appelée "fonction logistique continue".

Application : *Phénomènes d'évolutions : loi de Malthus & loi de Verhulst*

(Le contexte est celui du problème du Bac S 2003)

On considère une culture de bactéries en milieu clos.

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans la culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).

Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- *un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (partie A)*
- *un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (partie B)*

Partie A - Loi de Malthus

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la **vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence**.

Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc la solution de l'équation différentielle :

$$y' = ay.$$

(a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales)

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.

   Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0\, 2^{\frac{t}{T}}$
3. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le cas où $N_0 = 0{,}01$ et $a = 0{,}2$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :

Soit $g(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est strictement positive, dérivable sur $[0, +\infty[$ et vérifie pour tout t de $[0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = ay(1 - y)$$

où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales.

1. À l'aide des résultats précédents, déterminer les solutions strictement positives g de (E).
2. a. Sachant $N_0 = 0{,}01$, exprimer $g(t)$ juste en fonction de a.

   b. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'inégalité :

   $$g(t) < 1$$

   c. Étudier le sens de variation de g.

   d. On suppose $a = 0{,}2$. Tracer la courbe représentative de g dans le même repère que précédemment.

SOLUTION

Partie A - Loi de Malthus

1. On a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $$f(t) = N_0\mathbf{e}^{at}$$
2. Par définition de T : $$f(T) = 2N_0 = N_0\mathbf{e}^{aT}$$

   D'où : $$T = \frac{\ln(2)}{a}$$

   On en déduit : $$f(t) = N_0\, e^{\frac{t}{T}\ln(2)} = N_0\, 2^{\frac{t}{T}}$$
3. Voir ci-dessous.

Partie B

1. D'après les résultats précédents :

$$g(t) = \frac{1}{1 + A\mathbf{e}^{-at}} \quad \text{où } A \text{ est une constante}$$

2. a. On a : $$0{,}01 = N_0 = g(0) = \frac{1}{1+A}$$

   D'où : $$A = 99$$

   Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a donc : $$g(t) = \frac{1}{1+99\mathbf{e}^{-at}}$$

   b. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbf{e}^{-at} = 0$, il vient : $$\lim_{t \to +\infty} g(t) = 1$$

   De plus : $$1 + 99\,\mathbf{e}^{-at} > 1$$

   D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $[1, +\infty[$:

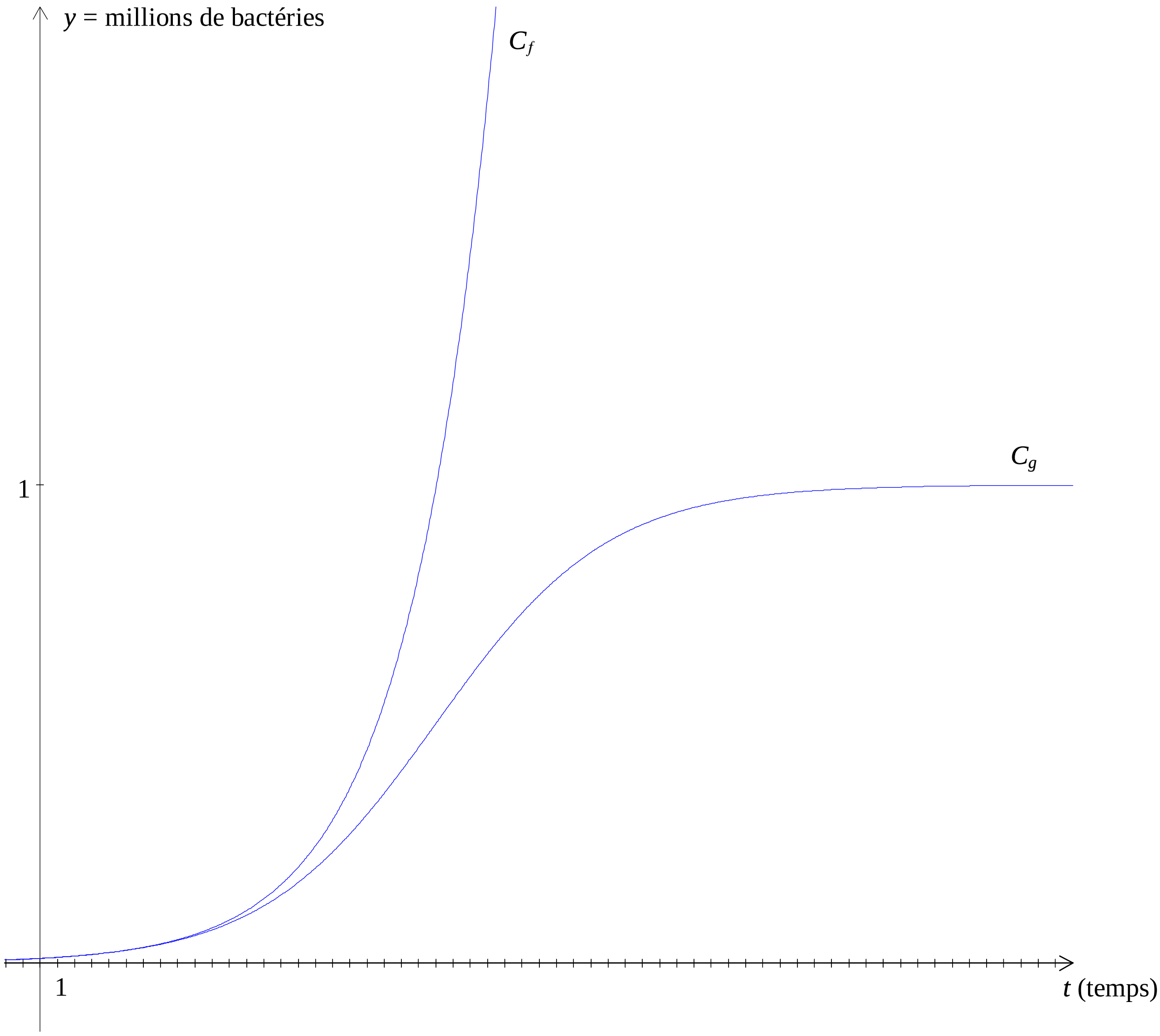
$$g(t) < 1 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+$$

   c. Puisque $0 < g < 1$ sur $\mathbb{R}_+$, $a > 0$ et $g' = ag(1 - g)$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit :

$$g' > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

d.



On constate que le premier modèle (de Malthus) n'est pas bon (sauf au début) car les bactéries se développant en milieu confiné, elles ne peuvent pas se multiplier infiniment. Le second modèle (de Verhulst) a l'avantage de bien faire apparaître un comportement asymptotique particulier (le nombre de bactéries fini par se stabiliser). En effet, les ressources en éléments nutritifs étant limitées, le nombre de bactéries tend à se stabiliser.

6.2. Équations différentielles non résolubles (formellement) en Terminale S

Dans ce paragraphe, nous allons juste traiter un exemple avec une méthode numérique.

On considère le problème différentiel :

$$(P) : \begin{cases} y' + 2xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On admet que ce problème différentiel (P) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$[1] .

L'équation différentielle $y' + 2xy = 1$ n'est pas à coefficients constants. Nous ne savons donc pas la résoudre, à notre niveau. On se propose donc, de tracer une ébauche de la courbe de sa solution par une méthode approchée dite "Méthode d"Euler".

Rappel du principe de la méthode d'Euler

LA CLÉ :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I alors, pour tout réel x de I et tout réel h, petit, tel que $x + h$ soit dans I, on a :

$$\boxed{\boldsymbol{f(x+h) \simeq f(x) + hf'(x)}}$$

En effet, on sait que :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h) \text{ où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

(Voir le cours sur le calcul différentiel)

L'approximation faite est donc d'autant meilleure que h est petit.

LE PRINCIPE ITÉRATIF :

On ne connaît pas d'expression de la fonction f. On connaît juste une équation différentielle dont elle est solution et on dispose également d'une condition initiale. L'idée d'Euler est de dire : "si on connaît la valeur de $f(x)$ et de $f'(x)$, on peut avoir une bonne approximation de f un peu plus loin (en $x + h$)".

Or, ici, nous connaissons $f(0) = 0$ (condition initiale) mais aussi $f'(0)$! En effet, on sait que f est une solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$. On a donc $f'(x) = 1 - 2xf(x)$ d'où $f'(0) = 1$. On peut donc connaître $f(h)$ où h est un pas que nous fixerons arbitrairement en fonction de la précision recherchée.

Et ainsi, de proche en proche, on peut avoir une approximation des valeurs de la fonction et donc tracer une courbe qui l'approche.

LES CALCULS

Commençons avec un pas $h = 0{,}1$.

On a donc, pour tout réel x : $\quad f(x + 0{,}1) \simeq f(x) + 0{,}1f'(x)$

Où $f'(x)$ se calcule avec l'équation différentielle :

$$f'(x) = 1 - 2xf(x)$$

[1] Cette unique solution est assurée par le théorème de "Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre 1" dont la démonstration est très ardue lorsque les coefficients de l'équation différentielle sont variables (et c'est le cas ici)

MISE EN ŒUVRE AVEC UN TABLEUR

Entrer la valeur du pas *h* (ici 0,1) dans cette cellule

Entrer la valeur de $f(0)$ dans cette cellule

Entrer dans cette cellule la valeur de *x* pour laquelle on souhaite commencer les calculs

Entrer ici la formule : **=$B$2**

	A	B	C
1	PAS h	0,1	
2	Valeur de f(0)	0	
3			
4	x	f(x)	f'(x)
5	0	0	1
6	0,1	0,1	0,98
7	0,2	0,198	0,921
8	0,3	...	...
9	0,4		
10	0,5		
11	0,6		

Entrer ici la formule : **=1-2*A5*B5** puis étirer vers le bas

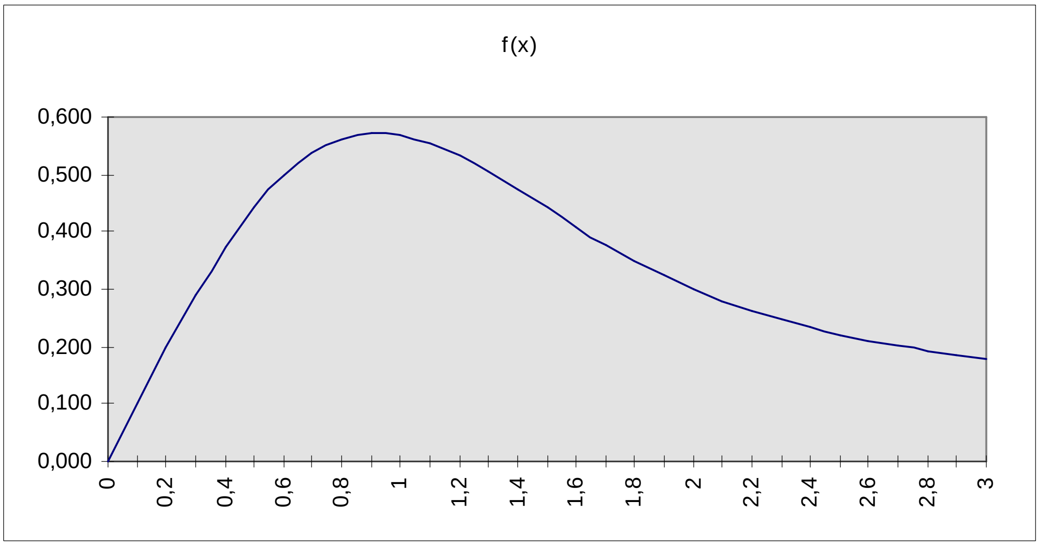
Entrer ici la formule : **=A5+$B$1** puis étirer vers le bas

Entrer ici la formule : **=B5+0,1*C5** puis étirer vers le bas

RÉSULTATS

x	$f(x)$	$f'(x) = 1 - 2xf(x)$	$f(x+0,1) \simeq f(x) + 0,1f'(x)$
0	0,000	1,000	0,100
0,1	0,100	0,980	0,198
0,2	0,198	0,921	0,290
0,3	0,290	0,826	0,373
0,4	0,373	0,702	0,443
0,5	0,443	0,557	0,499
0,6	0,499	0,402	0,539
0,7	0,539	0,246	0,563
0,8	0,563	0,099	0,573
0,9	0,573	-0,032	0,570
1	0,570	-0,140	0,556
1,1	0,556	-0,223	0,534
1,2	0,534	-0,281	0,506
1,3	0,506	-0,315	0,474
1,4	0,474	-0,328	0,441
1,5	0,441	-0,324	0,409
1,6	0,409	-0,309	0,378
1,7	0,378	-0,286	0,350
1,8	0,350	-0,258	0,324
1,9	0,324	-0,230	0,301
2	0,301	-0,203	0,280

Courbe $C_{0,1}$ approchant f sur l'intervalle [0 ; 2] :



On peut recommencer les calculs avec un pas plus fin (par exemple $h = 0{,}01$) pour avoir plus de précision.

On peut aussi choisir un pas négatif pour avoir l'allure de la courbe sur $\mathbb{R}_-$.

Pour information, une expression de la fonction solution au problème différentiel donné est :

$$f(x) = \mathbf{e}^{-x^2} \int_0^x \mathbf{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

7. Complément 1 (Hors programme). Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre : $y'' + ay' + by = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$

Dans tout ce qui suit, nous noterons (E) l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (\text{où } a, b \in \mathbb{R})$$

On note r_1 et r_2 les racines (éventuellement complexes) de l'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$.

On rappelle (ou on vérifiera facilement) que : $r_1 + r_2 = -a$ et $r_1 r_2 = b$

<u>7.1. Théorème</u> *Structure de l'ensemble des solutions (espace vectoriel de dimension 2)*

Soit I un intervalle.

1. Soient f_1 et f_2 deux solutions sur I de l'équation différentielle (E). Alors, pour toutes constantes A et B, les fonctions de la forme $Af_1 + Bf_2$ sont également des solutions sur I de (E).
2. Si f_1 et f_2 sont des solutions indépendantes[1] de (E) sur I, alors les solutions sur I de l'équation différentielle (E) sont **toutes** de la forme $Af_1 + Bf_2$ (où A et B sont des constantes).

[1] f_1 et f_2 indépendantes sur I signifie : il n'existe pas de réel k tel que $f_2 = kf_1$ ou $f_1 = kf_2$ sur I. Dans le cas contraire (lorsque k existe), on dit que f_1 et f_2 sont liées.

Démonstration :

1. Évident, on utilise la linéarité de la dérivation : $(u+v)' = u' + v'$ et $(ku)' = ku'$.
2. Beaucoup moins évident et indispensable pour la suite ! Nous aurons besoin du lemme suivant (une version affaiblie du théorème de Cauchy-Lipschitz assurant l'existence et l'unicité de solutions définies par deux conditions initiales du type $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$) ainsi que d'un outil, le Wronskien qui est une fonction construite à partir de deux solutions f_1 et f_2 de (E) qui donne un critère simple pour voir si elle sont indépendantes ou non.

Lemme *Forme affaiblie du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre 2*

Soient a et b deux réels.

Soient I un intervalle et $x_0 \in I$.

La seule solution du problème différentiel :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \text{ sur } I \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

est la fonction identiquement nulle sur I.

Démonstration :

Posons : $z = y' - r_1 y$ sur I

On a ainsi : $z' - r_2 z = y'' - r_1 y' - r_2 y' + r_1 r_2 y = y'' - (r_1 + r_2)y + r_1 r_2 y = y'' - ay' + b = 0$

On rappelle que r_1 et r_2 sont les solutions de : $r^2 + ar + b = 0$

Il existe donc une constante C telle que pour tout $x \in I$:

$$z(x) = C\,\mathbf{e}^{r_2 x}$$

Mais comme $z(x_0) = y'(x_0) - r_1 y(x_0) = 0$, on en déduit que $C = 0$ d'où :

$$z = 0 \text{ sur } I$$

Il vient alors : $y' - r_1 y = 0$ sur I

Il existe donc une constante D telle que pour tout $x \in I$:

$$y(x) = D\,\mathbf{e}^{r_1 x}$$

Mais comme $y(x_0) = 0$, on a $D = 0$ d'où : $y = 0$ sur I

D'où le lemme.

Présentons maintenant un outil bien pratique

Définition *Wronskien*

Soient I un intervalle et f_1 et f_2 deux fonctions dérivables sur I.

On appelle Wronskien de f_1 et f_2, la fonction définie sur I par :

$$W(f_1, f_2) = f_1 f_2' - f_2 f_1'$$

Propriétés du Wronskien

- Si f_1 et f_2 sont des solutions de (E) sur I alors il existe une constante K telle que :

$$W(f_1, f_2)(x) = K\,\mathbf{e}^{-ax} \text{ pour tout } x \in I$$

- Si f_1 et f_2 sont des solutions indépendantes de (E) sur I alors leur Wronskien ne s'annule en aucun point de I.

Démonstration des propriétés du Wronskien :

- Comme f_1 et f_2 sont deux fois dérivables (puisque solutions de (E)), la fonction W est une fois dérivable et on obtient :

$$W'(f_1, f_2) = f_1' f_2' + f_1 f_2'' - f_2' f_1' - f_2 f_1''$$

Or, nous savons que : $f_1'' + a f_1' + b f_1 = 0$ et $f_2'' + a f_2' + b f_2 = 0$

Nous obtenons alors :

$$W'(f_1, f_2) = f_1' f_2' + f_1(-a f_2' - b f_2) - f_2' f_1' - f_2(-a f_1' - b f_1)$$

$$W'(f_1, f_2) = -a(f_1 f_2' - f_2 f_1') = -aW(f_1, f_2)$$

Donc, d'après le paragraphe 2, il existe bien une constante K telle que :

$$W(f_1, f_2)(x) = K\mathbf{e}^{-ax} \text{ pour tout } x \in I$$

- Raisonnons par contraposition. Supposons que le Wronskien s'annule en un point de I. Alors, vu son expression ci-dessus, on a $K = 0$, et il s'annule en tout point de I.

$$W(f_1, f_2) = 0 \text{ sur } I$$

Montrons que f_1 et f_2 sont liées.

Si f_1 est nulle sur I, il n'y a rien à faire. Dans le cas contraire, il existe $x_0 \in I$ tel que :

$$f_1(x_0) \neq 0$$

Posons $g = f_1(x_0)f_2 - f_1 f_2(x_0)$ sur I

Comme g est combinaison linéaire de f_1 et f_2, le point n°1 du théorème 7.1. permet d'affirmer que g est une solution de (E).

De plus : $g(x_0) = f_1(x_0)f_2(x_0) - f_1(x_0)f_2(x_0) = 0$

Et : $g'(x_0) = f_1(x_0) f_2'(x_0) - f_1'(x_0)f_2(x_0) = W(f_1, f_2)(x_0) = 0$

D'après le lemme, on en déduit que g est la fonction identiquement nulle sur I d'où :

$$f_1(x_0)f_2 = f_1 f_2(x_0) \text{ sur } I$$

Et comme $f_1(x_0) \neq 0$, il vient en posant $k = \dfrac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)}$:

$$f_2 = kf_1 \text{ sur } I$$

Donc f_1 et f_2 sont liées.

En contraposant, si f_1 et f_2 sont deux solutions indépendantes de (E) sur I, alors leur Wronskien ne s'annule en aucun point de I.

Remarque : si on suppose que f_1 ne s'annule jamais sur I alors on peut faire une démonstration plus simple. En effet, la condition $W(f_1, f_2) = 0$ sur I peut s'écrire :

$$\frac{f_2' f_1 - f_2 f_1'}{f_1^2} = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)' = 0 \text{ sur } I$$

Il existe donc une constante k telle que $f_2 = kf_1$ sur I et, par suite, f_1 et f_2 sont liées.

Venons-en, enfin au point n°2 du théorème 7.1.

Soit f une solution quelconque de (E) sur I. Nous allons montrer qu'il existe des réels A et B tels que :

$$f = Af_1 + Bf_2 \text{ (et donc tels que } f' = A f_1' + B f_2' \text{)}$$

Pour cela, nous allons montrer que le système suivant (d'inconnues A et B) admet une unique solution :

$$(S) \begin{cases} Af_1 + Bf_2 = f \text{ sur } I \\ Af_1' + Bf_2' = f' \text{ sur } I \end{cases}$$

Notons, pour tout réel $x \in I$, (A_x, B_x) le couple de réel solution du système :

$$(S_x) \begin{cases} A_x f_1(x) + B_x f_2(x) = f(x) \\ A_x f_1'(x) + B_x f_2'(x) = f'(x) \end{cases}$$

Un tel couple existe car le déterminant du système (S_x), à savoir $(f_1 f_2' - f_2 f_1')(x)$ est non nul puisque par hypothèse f_1 et f_2 sont des solutions indépendantes de (E) sur I (propriété du Wronskien).

En résolvant le système (S_x), on obtient alors :

$$A_x = \frac{W(f, f_2)(x)}{W(f_1, f_2)(x)} \text{ et } B_x = -\frac{W(f, f_1)(x)}{W(f_1, f_2)(x)}$$

Comme les fontions f, f_1 et f_2 sont deux fois dérivables, les fonctions $x \longmapsto A_x$ et $x \longmapsto B_x$ sont dérivables et pour tout $x \in I$:

$$A_x' = \frac{W'(f, f_2)(x)W(f_1, f_2)(x) - W(f, f_2)(x)W'(f_1, f_2)(x)}{[W(f_1, f_2)(x)]^2}$$

$$A_x' = \frac{-aW(f, f_2)(x)W(f_1, f_2)(x) + W(f, f_2)(x)aW(f_1, f_2)(x)}{[W(f_1, f_2)(x)]^2}$$

$$A_x' = 0$$

Donc le réel A_x est **indépendant** de x. C'est une constante A.

On montre, de même, que B_x est indépendant de x.

D'où le point n°2 du théorème 7.1.

Il est temps maintenant de construire les solutions de (E).

7.2. Théorème

Soit λ un nombre complexe.

La fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$ et définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathbf{e}^{\lambda x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = \lambda \mathbf{e}^{\lambda x}$$

Démonstration :

Posons $\lambda = \alpha + \mathbf{i}\beta$.

On a : $$f(x) = \mathbf{e}^{(\alpha+\mathbf{i}\beta)x} = \mathbf{e}^{\alpha x}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\beta x} = \mathbf{e}^{\alpha x}(\cos(\beta x) + \mathbf{i}\sin(\beta x))$$

En utilisant le concept de linéarité de la dérivation ainsi que la relation $(uv)' = u'v + uv'$ étendus à $\mathbb{C}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha\mathbf{e}^{\alpha x}(\cos(\beta x) + \mathbf{i}\sin(\beta x)) + \mathbf{e}^{\alpha x}(-\beta\sin(\beta x) + \mathbf{i}\beta\cos(\beta x)) \\ &= \mathbf{e}^{\alpha x}(\alpha\cos(\beta x) + \mathbf{i}\beta\cos(\beta x) + \alpha\mathbf{i}\sin(\beta x) + \mathbf{i}^2\beta\sin(\beta x)) \\ &= (\alpha + \mathbf{i}\beta)\mathbf{e}^{\alpha x}(\cos(\beta x) + \mathbf{i}\sin(\beta x)) = \lambda\mathbf{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

7.3. Définition

L'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$ s'appelle équation caractéristique associée à (E).

7.4. Théorème

Soit λ un nombre complexe. Soit f la fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ et définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \mathbf{e}^{\lambda x}$.

La fonction f est une solution de (E) si et seulement si λ est une solution de l'équation caractéristique de (E)

Démonstration :

On a, pour tout réel x : $f'(x) = \lambda\,\mathbf{e}^{\lambda x}$ et $f''(x) = \lambda^2\,\mathbf{e}^{\lambda x}$

On a les équivalences suivantes :

$$f \text{ solution de } (E)$$

$$f'' + af' + bf = 0$$

$$\mathbf{e}^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

Et comme $\mathbf{e}^{\lambda x} \neq 0$: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

λ est solution de l'équation caractéristique associée à (E)

Résolution de (E) (sur un intervalle I non réduit à un point)

1er cas : l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2

D'après le théorème 7.4. , on connaît donc deux solutions f_1 et f_2 sur I définies par :

$$f_1(x) = \mathbf{e}^{r_1 x} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \mathbf{e}^{r_2 x}$$

Les fonctions f_1 et f_2 sont non nulles et non liées (si elles l'étaient, il existerait un réel k tel que pour tout réel x de I : $\mathbf{e}^{r_2 x} = k\,\mathbf{e}^{r_1 x}$. D'où $k = \mathbf{e}^{(r_2 - r_1)x}$ ce qui n'est pas une constante car $r_1 \neq r_2$. On peut aussi calculer leur Wronskien qui est égal à $(r_2 - r_1)\,\mathbf{e}^{(r_1 + r_2)x} \neq 0$ car $r_1 \neq r_2$)

D'après le théorème 7.1., les solutions de (E) sur I sont toutes les fonctions f définies par :

$$f(x) = A\,\mathbf{e}^{r_1 x} + B\,\mathbf{e}^{r_2 x} \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes quelconques}$$

Exemple : résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation : $y'' - y' - 2y = 0$

L'équation caractéristique est : $r^2 - r - 2 = 0$

$$(r + 1)(r - 2) = 0$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = A\,\mathbf{e}^{-x} + B\,\mathbf{e}^{2x}$

2ème cas : l'équation caractéristique admet une solution double $r = -\dfrac{a}{2}$. (Et d'après le produit des racines, $r^2 = b$)

D'après le théorème 7.4., on connaît donc une solution f_1 sur I définie par :

$$f_1(x) = \mathbf{e}^{rx}$$

N'en connaissant pas d'autres à ce stade, le théorème 7.1. ne peut, *a priori*, pas s'appliquer. Procédons comme pour les équations différentielles du premier ordre.

Considérons une solution f quelconque de (E). On a donc :

$$f'' + af' + bf = 0 \text{ sur } I$$

Posons $z(x) = f(x)\ \mathbf{e}^{-rx}$ pour tout $x \in I$.

On a : $$z'(x) = f'(x)\ \mathbf{e}^{-rx} - rf(x)\ \mathbf{e}^{-rx}$$

$$z''(x) = f''(x)\ \mathbf{e}^{-rx} - rf'(x)\ \mathbf{e}^{-rx} - rf'(x)\ \mathbf{e}^{-rx} + r^2 f(x)\ \mathbf{e}^{-rx}.$$

D'où : $$z''(x) = \mathbf{e}^{-rx}(f''(x) - 2rf'(x) + r^2 f(x)) = \mathbf{e}^{-rx}(f''(x) + af'(x) + bf(x)) = 0$$

Et donc : $$z'(x) = A \text{ pour tout } x \in I$$

$$z(x) = Ax + B \text{ pour tout } x \in I$$

Les solutions de (E) sur I sont donc toutes les fonctions f définies par $f(x) = (Ax + B)\ \mathbf{e}^{rx}$ où $x \in I$.

Autre méthode : on vérifie aisément que la fonction f_2 définie par $f_2(x) = x\,\mathbf{e}^{rx}$ est solution de (E). Il est également facile de vérifier que f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes. Le théorème 7.1. permet alors de conclure.

Exemple : résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $$y'' - 4y' + 4y = 0$$

L'équation caractéristique est : $$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r - 2)^2 = 0$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $$f(x) = (Ax + B)\,\mathbf{e}^{2x}$$

3ème cas : l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $\lambda = \alpha + \mathbf{i}\beta$ et $\overline{\lambda} = \alpha - \mathbf{i}\beta$.

D'après le théorème 7.4. , on connaît donc deux solutions g_1 et g_2 définies par :

$$g_1(x) = \mathbf{e}^{\lambda x} = \mathbf{e}^{\alpha x}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}\beta x} \quad \text{et} \quad g_2(x) = \mathbf{e}^{\overline{\lambda} x} = \mathbf{e}^{\alpha x}\ \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\beta x}\ (= \overline{g_1(x)})$$

Le problème, ici, est que les fonctions g_1 et g_2 sont des fonctions à valeurs complexes. Or nous cherchons des solutions qui soient des fonctions à valeurs réelles. En voici deux :

$$f_1(x) = \frac{g_1(x) + g_2(x)}{2} = \mathbf{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{g_1(x) - g_2(x)}{2\mathbf{i}} = \mathbf{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

On sait aussi que la partie réelle et la partie imaginaire sont des quantités réelles, d'où l'idée d'écrire : $f_1(x) = \mathrm{Re}(g_1(x))$ et $f_2(x) = \mathrm{Im}(g_1(x))$

On vérifie facilement que f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème 7.1., les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions f définies par :

$$f(x) = \mathbf{e}^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$$

Exemple : résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation: $$y'' - 2y' + 5y = 0$$

L'équation caractéristique est : $$r^2 - 2r + 5 = 0$$

Elle admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\lambda = 1 + 2\mathbf{i} \text{ et } \overline{\lambda} = 1 - 2\mathbf{i}$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $$f(x) = \mathbf{e}^{x}(A\cos(2x) + B\sin(2x))$$

RÉSUMÉ

Si l'équation caractéristique admet pour solutions :	Alors la forme générale des solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = 0$ est :
deux racines réelles distinctes r_1 et r_2	$f(x) = A\,\mathbf{e}^{r_1 x} + B\,\mathbf{e}^{r_2 x}$
une racine réelle double r	$f(x) = (Ax + B)\ \mathbf{e}^{rx}$
deux racines complexes conjuguées $\lambda = \alpha + \mathbf{i}\beta$ et $\overline{\lambda} = \alpha - \mathbf{i}\beta$	$f(x) = \mathbf{e}^{\alpha x}\,(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$

7.5. Théorème *Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre 2*

(E) admet une unique solution f sur $\mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions initiales $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y'_0$.

Exemple de démonstration : dans le cas où l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes

La condition $f(x_0) = y_0$ s'écrit : $A\,\mathbf{e}^{r_1 x_0} + B\,\mathbf{e}^{r_2 x_0} = y_0$

La condition $f(x_0) = y'_0$ s'écrit : $Ar_1\,\mathbf{e}^{r_1 x_0} + Br_2\,\mathbf{e}^{r_2 x_0} = y'_0$

Posons $\alpha = \mathbf{e}^{r_1 x_0}$ et $\beta = \mathbf{e}^{r_2 x_0}$. Nous avons le système :

$$\begin{cases} A\alpha + B\beta = y_0 \\ Ar_1\alpha + Br_2\beta = y'_0 \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution si et seulement si les vecteurs directeurs correspondants sont non colinéaires. On a $\vec{u}\,(-\beta\,;\,\alpha)$ et $\vec{v}\,(-\beta r_2\,;\,\alpha r_1)$. La condition de colinéarité s'écrit :

$$-\beta\alpha r_1 + \beta r_2\alpha = \alpha\beta(r_2 - r_1)$$

Or $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ (une exponentielle n'est jamais nulle) et $r_2 \neq r_1$ (par hypothèse), d'où $\alpha\beta(r_2 - r_1) \neq 0$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant non colinéaires, le système admet un unique couple solution (A ; B).

Les autres cas sont analogues.

Remarque : il est indispensable d'avoir deux conditions du type $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y'_0$ (ce qu'on appelle des conditions de Cauchy) pour s'assurer de l'unicité de la solution. Si tel n'est pas le cas, le nombre de solutions peut être très variable (de 0 à l'infini...)

Exemple 1 : résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème :

$$y'' + \pi^2 y = 0 \text{ avec } y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 0. \text{ (Conditions de Cauchy)}$$

L'équation caractéristique est $r^2 + \pi^2 = 0$ qui possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \mathbf{i}\pi$ et $r_2 = -\mathbf{i}\pi$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par :

$$y(x) = A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x)$$

En dérivant, on obtient : $y'(x) = -A\pi\sin(\pi x) + B\pi\cos(\pi x)$

Les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ nous donnent : $0 = A$ et $0 = B$

Conformément au théorème 7.5., on a bien une unique solution $y = 0$.

Exemple 2 : résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème :

$$y'' + \pi^2 y = 0 \text{ avec } y(0) = 0 \text{ et } y(1) = 0. \text{ (Ce ne sont pas des conditions de Cauchy)}$$

Comme précédemment, les solutions (s'il y en a) sont de la forme :

$$y(x) = A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x)$$

La condition $y(0) = 0$ donne $0 = A$ et la condition $y(1) = 0$ donne $0 = -A$, donc $A = 0$.

Et il n'y a aucune contrainte sur la constante B, donc l'équation admet une infinité de solution de la forme :

$$y(x) = B\sin(\pi x)$$

Exemple 3 : résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème :

$$y'' + \pi^2 y = 0 \text{ avec } y(0) = 0 \text{ et } y(1) = 1. \text{ (Ce ne sont pas des conditions de Cauchy)}$$

Comme précédemment, les solutions (s'il y en a) sont de la forme :

$$y(x) = A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x)$$

La condition $y(0) = 0$ donne $0 = A$ et la condition $y(1) = 1$ donne $-1 = A$, d'où une incompatibilité.

L'équation donnée avec les conditions proposées n'admet donc pas de solution.

8. Complément 2 (Hors programme) : résolution des équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients variables sans second membre

Précisons clairement notre objectif :

Soit I un intervalle, $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Nous voulons résoudre sur I, l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E) : y'(x) + a(x)y(x) = 0 \quad (x \in I)$$

1. Existence de solutions
   a. Soit A une primitive de a sur I. Vérifier que l'application :

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathbf{e}^{-A(x)} \end{aligned}$$

   est une solution de (E) sur I.

   b. Soit $k \in \mathbb{R}$. Montrer que les fonctions $f_k = kf$ sont aussi des solutions de (E) sur I.

2. Unicité des solutions (et plus précisément, les **seules** solutions de (E) sur I sont les fonctions f_k où $k \in \mathbb{R}$)

   Soit φ une solution quelconque de (E) sur I. On pose : $z(x) = \varphi(x)\ \mathbf{e}^{A(x)}$ pour tout $x \in I$.

   Démontrer que z est constante sur I. En déduire qu'il existe un réel k tel que $\varphi = f_k$.

Détail des calculs :

1. La fonction f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, on a :

$$f'(x) = -a(x)\ \mathbf{e}^{-A(x)}$$

   a. On a : $\quad f'(x) + a(x)f(x) = -a(x)\ \mathbf{e}^{-A(x)} + a(x)\ \mathbf{e}^{-A(x)} = 0$

   Donc f est bien une solution de (E) sur I.

   b. Pour tout $x \in I$, on a :

$$f_k'(x) + a(x)f_k(x) = kf'(x) + a(x)\,k\,f(x) = k(f'(x) + a(x)f(x)) = 0$$

   car f est une solution de (E) sur I.

Donc les fonctions f_k sont bien des solutions de (E) sur I.

2. La fonction z est dérivable sur I (puisque φ l'est en tant que solution de (E)) et on a :

$$z'(x) = \varphi'(x)\ \mathbf{e}^{A(x)} + \varphi(x)a(x)\ \mathbf{e}^{A(x)} = (\varphi'(x) + \varphi(x)a(x))\,\mathbf{e}^{A(x)} = 0 \text{ car } \varphi \text{ est une solution de } (E)$$

Donc z est constante sur I. Cela signifie qu'il existe un réel k tel que :

$$z(x) = k \text{ pour tout } x \in I$$

Et comme $z(x) = \varphi(x)\ \mathbf{e}^{A(x)}$, il existe un réel k tel que :

$$\varphi(x) = k\,\mathbf{e}^{-A(x)} = f_k(x) \text{ pour tout } x \in I$$

9. Complément 3 (Hors programme) : résolution des équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients variables avec second membre

Précisons clairement notre objectif :

Soient I un intervalle et a et b des applications continues de I dans ℝ.

Nous voulons résoudre sur I, l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E) : y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad (x \in I)$$

Existence d'une solution particulière

Soit p la fonction définie sur I par :

$$p(x) = \mathbf{e}^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} b(t)\mathbf{e}^{A(t)}\mathrm{d}t \quad \text{où } x_0 \in I$$

On a : $$p'(x) = -a(x)\ \mathbf{e}^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} b(t)\mathbf{e}^{A(t)}\mathrm{d}t + \mathbf{e}^{-A(x)}\ b(x)\ \mathbf{e}^{A(x)} = -a(x)\ \mathbf{e}^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} b(t)\mathbf{e}^{A(t)}\mathrm{d}t + b(x)$$

D'où : $$p'(x) + a(x)p(x) = b(x)$$

Donc p est bien une solution particulière de (E) sur I.

Recherche des solutions générales

On a les équivalences suivantes :

$$\text{Soit } f \text{ une solution de } (E) \text{ sur } I$$

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x) \text{ pour tout } x \in I$$

$$f'(x) + a(x)f(x) = p'(x) + a(x)p(x) \text{ pour tout } x \in I$$

$$(f' - p')(x) + a(x)(f - p)(x) = 0$$

$$f - p \text{ est solution de } (E_h) : y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

Et d'après le paragraphe 8 : $$(f - p)(x) = k\,\mathbf{e}^{-A(x)}$$

$$f(x) = k\,\mathbf{e}^{-A(x)} + p(x)$$

$$f(x) = k\,\mathbf{e}^{-A(x)} + \mathbf{e}^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} b(t)\mathbf{e}^{A(t)}\mathrm{d}t$$

$$f(x) = \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}\mathrm{d}t + k}{\mathbf{e}^{A(x)}}$$