Exemple 1 : avec des fonctions du type ln u (où u est une fonction)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,\frac{1}{2}[$ par : $f(x) = \ln(2-2x) + \ln(1-2x)$

1) Étudier la limite de f en $\frac{1}{2}$.

2) Étudier la limite de f en $-\infty$.

SOLUTION :

> Principe : on cherche déjà la limite de la quantité X qui "est dans le logarithme" puis on en déduit la limite de ln X

1) • On a : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2-2x) = 1$.

Donc : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\ln(2-2x) = 0$ car $\ln 1 = 0$.

• On a : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}(1-2x) = 0^+$.

Donc : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\ln(1-2x) = -\infty$ car $\lim\limits_{X\to 0^+}\ln X = -\infty$.

Bilan : par addition, nous obtenons : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}[\ln(2-2x)+\ln(1-2x)] = -\infty$.

2) • On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-2x) = +\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(2-2x) = +\infty$ car $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X = +\infty$.

• De même, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x) = +\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1-2x) = +\infty$ car $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X = +\infty$.

Bilan : par addition, nous obtenons : $\lim\limits_{x\to-\infty}[\ln(2-2x)+\ln(1-2x)] = +\infty$

Exemple 2 : avec une fonction du type $\mathbf{e}^u$ (où u est une fonction)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathbf{e}^{1{,}1x-1}$

1) Étudier la limite de f en $+\infty$.

2) Étudier la limite de f en $-\infty$.

SOLUTION :

1) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(1{,}1x-1) = +\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{e}^{1{,}1x-1} = +\infty$ car $\lim\limits_{X\to+\infty}\mathbf{e}^X = +\infty$.

2) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(1{,}1x-1) = -\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathbf{e}^{1{,}1x-1} = 0$ car $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathbf{e}^X = 0$.

Exercices proposés : déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x^2)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+x^2)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x^2)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{6x+1}{2x-1}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{e}^{-x^2}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{e}^{x-x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\mathbf{e}^{x-x^2}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{e}^{\mathbf{e}^{-x}}$

Questions supplémentaires :

1) Justifier pourquoi, dans l'exemple 1, la fonction f est définie sur $]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}[$.

2) Démontrer que la dérivée de la fonction f de l'exemple 1 est donnée par :

$$f'(x) = \frac{4x-3}{(x-1)(2x-1)} \quad \text{pour tout } x \in \left]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}\right[.$$

En déduire le tableau de variation de cette fonction f.

(Voir aussi l'exemple 2 de la fiche méthode "étudier le signe d'une expression")

Exercice plus difficile :

Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} [\ln(2-2x) - \ln(1-2x)]$

(Qu'y a-t-il de radicalement différent par rapport à l'exemple 1 ?)

(Voir aussi l'exemple 2 de la fiche méthode "comportements asymptotiques")

Mini problème :

Partie *A* *Étude d'une fonction "simple"*

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \frac{1-x^2}{2}$.

1) Étudier les limites de u en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Calculer $u'(x)$.

Partie *B* *Étude d'une fonction comportant une exponentielle*

On considère la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \mathbf{e}^{\frac{1-x^2}{2}}$.

1) Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes horizontales.

2) Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variations (complet) de f.

3) Tracer (soigneusement) la courbe C_f représentant f dans un repère orthonormal. (Unités : 4 cm)

4) Soit A le point de C_f d'abscisse $x_0 = 1$. Calculer l'ordonnée de A.

5) Déterminer une équation de la tangente Δ à C_f en A. Tracer Δ dans le repère.

(Voir aussi la fiche méthode "déterminer une équation de la tangente à une courbe")

Réponses des exercices proposés :

1) $+\infty$ 2) $+\infty$ 3) 0 4) ln 3 5) 0 6) 0 7) 1 8) 1

Indications pour l'exercice plus difficile :

Nous avons affaire à une indétermination du type "$\infty - \infty$". Pour lever cette indétermination, procéder en deux étapes : ❶ utiliser la relation $\ln A - \ln B = \ln \frac{A}{B}$ (pour tous A et B de $]0\ ;\ +\infty[$) puis ❷ mettre le terme de plus haut degré en facteur pour lever l'indétermination de la fraction rationnelle. Le résultat final est : ln 1 = 0.

Quelques réponses du mini-problème :

A1) $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$.

B1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Asymptote horizontale : $y = 0$.

(Autres réponses dans la fiche méthode "déterminer une équation de la tangente à une courbe")