

Exemple 1 : (in)équation simples

Résoudre les (in)équations suivantes :

- 1) $\ln(x - 3) - 1 \geq 0$
- 2) $e^{2x-3} - 2 \geq 0$
- 3) $\ln(x - 1) - \ln(2x) = 0$
- 4) $e^{2x} + 2e^{-x} \leq 0$

SOLUTIONS

- 1) Contrainte : $x > 3$

Résolution : pour $x > 3$, on a :

$$\ln(x - 3) \geq 1$$

Or, $1 = \ln e$, d'où :

$$\ln(x - 3) \geq \ln e$$

D'après la croissance du logarithme ($\ln A \geq \ln B \Leftrightarrow A \geq B$ pour tous A et B de $]0 ; +\infty[$), on obtient :

$$x - 3 \geq e$$

$$x \geq 3 + e$$

Comme $3 + e > 3$, on a :

$$S = [3 + e ; +\infty[$$

- 2) On a :

$$e^{2x-3} \geq 2$$

D'après la croissance du logarithme ($\ln A \geq \ln B \Leftrightarrow A \geq B$ pour tous A et B de $]0 ; +\infty[$), on obtient :

$$\ln(e^{2x-3}) \geq \ln 2$$

C'est-à-dire :

$$2x - 3 \geq \ln 2$$

$$x \geq \frac{3 + \ln 2}{2}$$

Conclusion :

$$S = \left[\frac{3 + \ln 2}{2} ; +\infty[$$

- 3) Contraintes : $x - 1 > 0$ et $2x > 0$. Donc : $x > 1$.

Résolution : pour $x > 1$, on a :

$$\ln(x - 1) = \ln(2x)$$

D'après la propriété : $\ln A = \ln B \Leftrightarrow A = B$ pour tous A et B de $]0 ; +\infty[$, on obtient :

$$x - 1 = 2x$$

$$x = -1$$

Or, -1 n'est pas supérieur à 1. Donc

$$S = \emptyset$$

- 4) L'exponentielle est strictement positive. Donc, pour tout réel x : $e^{2x} + 2e^{-x} > 0$.

L'inéquation proposée n'a pas de solution : $S = \emptyset$

Exemple 2 : (in)équation factorisables

Résoudre les (in)équations suivantes :

- 1) $\ln(x^2) = (\ln x)^2$
- 2) $e^{2x} - 2e^x \geq 0$

Méthode :

Pour une (in)équation comportant des **logarithmes** :

- 1) Préciser les contraintes

- 2) Essayer de se ramener à :

une inégalité du type $\ln A \leq \ln B$ (inéquations)

ou

une égalité du type $\ln A = \ln B$ (équations)

- 3) Utiliser la croissance du logarithme :

$$\ln A \leq \ln B \Leftrightarrow A \leq B \text{ pour tous } A \text{ et } B \text{ de }]0 ; +\infty[\text{ (Inéquations)}$$

ou la propriété : $\ln A = \ln B \Leftrightarrow A = B$ pour tous A et B de $]0 ; +\infty[$ (Équations)

Éviter de donner des arguments du genre : "on supprime les logarithmes"

- 4) Confronter les solutions aux contraintes.

Pour une (in)équation comportant des **exponentielles** :

- 1) Pas de contraintes

- 2) Utiliser le fait que l'exponentielle est la fonction réciproque du logarithme : $\ln e^A = A$

SOLUTIONS :

1) Contraintes : $x \neq 0$ et $x > 0$. Donc : $x > 0$.

Résolution : on sait que, pour tout $x > 0$, on a : $\ln(x^2) = 2 \ln x$.

Notre équation s'écrit donc : $2 \ln x = (\ln x)^2$

Regroupons et factorisons : $\ln x (2 - \ln x) = 0$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

$$\ln x = 0 = \ln 1 \quad \text{ou} \quad \ln x = 2 = \ln e^2$$

D'après la propriété : $\ln A = \ln B \Leftrightarrow A = B$ pour tous A et B de $]0 ; +\infty[$, on obtient :

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = e^2$$

Les nombres 1 et e^2 sont strictement positifs (donc compatibles avec les contraintes)

D'où : $S = \{1 ; e^2\}$

2) Comme $e^{2x} = e^x \times e^x$, on a la factorisation suivante :

$$e^x (e^x - 2) \geq 0$$

En divisant par e^x (qui est strictement positif) : $e^x - 2 \geq 0$

$$e^x \geq 2$$

D'après la croissance du logarithme ($\ln A \geq \ln B \Leftrightarrow A \geq B$ pour tous A et B de $]0 ; +\infty[$), on obtient :

$$\ln e^x \geq \ln 2$$

$$x \geq \ln 2$$

$$S = [\ln 2 ; +\infty[$$

Exemple 3 : inéquation résolue avec un tableau de signes. Voir exemple 4 de la fiche méthode "étudier le signe d'une expression"

Exercices proposés : après avoir précisé les éventuelles contraintes, résoudre :

1) $\ln(5x - 3) = 2$

5) $\ln(x + 3) \leq 1 + \ln(1 - x)$

2) $\ln(2x + 1) + \ln(x - 3) = \ln(x + 5)$

6) $\ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) \leq 0$

3) $\ln(3 - x) + 1 \geq 0$

7) $5e^{4x} - 13e^{2x} - 6 = 0$.

4) $2(\ln x)^2 + 3\ln x - 2 = 0$

[Indication : on pourra poser $X = e^{2x}$]

Exercice de prolongement :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]0 ; +\infty[$ et (E) l'équation : $\ln x = x^n$

- Dans cette question, $n = 1$. Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$, par : $f(x) = x - \ln x$. En déduire, que dans le cas $n = 1$, l'équation (E) n'a aucune solution dans $]0 ; +\infty[$.
- Dans cette question, n est quelconque. En choisissant la bonne fonction, démontrer, comme ci-dessus, que l'équation (E) n'a aucune solution dans $]0 ; +\infty[$, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Réponses des exercices proposés :

1) $\left\{\frac{e^2+3}{5}\right\}$ 2) $\{4\}$ 3) $] -\infty ; 3 - \frac{1}{e}]$ 4) $\left\{\frac{1}{e^2}; \sqrt{e}\right\}$ 5) $] -3 ; \frac{e-3}{e+1}]$ 6) $[-2 ; -\frac{1}{2} [$ 7) $\left\{\frac{1}{2} \ln 3\right\}$