En Mathématiques, on est souvent amené à étudier le signe d'une expression. Cela peut se produire lors de l'étude des variations d'une fonction (car le signe de la dérivée donne le sens de variation de la fonction). Cela peut également se produire lors de l'étude de la position d'une courbe par rapport à une autre. Ou, tout simplement, pour établir certaines inégalités.

Le problème de l'étude du signe, c'est que, suivant la nature de l'expression, la stratégie n'est pas toujours la même. Tantôt, le signe est immédiat, tantôt on procède à une factorisation puis on dresse un tableau de signes, tantôt on peut obtenir le signe en manipulant des inégalités. L'objectif de cette fiche méthode est de vous présenter ces différentes stratégies possibles.

Exemple 1 : cas où le signe est immédiatement visible (ou presque !)

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = -(x^2 + 2x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$

Préciser le sens de variation de la fonction f.

SOLUTION :

Nous savons que le sens de variation de f est donné par le signe de sa dérivée f'. Calculons donc f'.

La fonction f est du type : $f = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = -(x^2+2x+2) \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

On a donc : $f' = u'v + uv'$

Ce qui donne : $f'(x) = (-2x-2)\,\mathrm{e}^{-x} - (x^2+2x+2) \times (-\mathrm{e}^{-x})$

En factorisant par e^{-x}, puis en réduisant : $f'(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$

Or, on sait que : $x^2 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout réel x

On a donc : $f'(x) \geqslant 0$ pour tout réel x

Conclusion : la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : cas où l'on dresse un tableau de signe

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\dfrac{-2}{2-2x} + \dfrac{-2}{1-2x} \geqslant 0$

SOLUTION :

Le signe d'un produit ou d'un quotient est généralement plus simple à étudier que celui d'une somme. Nous allons donc, ici, réduire au même dénominateur :

$$\frac{-2(1-2x)-2(2-2x)}{(2-2x)(1-2x)} \geqslant 0$$

En réduisant le numérateur : $\dfrac{8x-6}{(2-2x)(1-2x)} \geqslant 0$

En simplifiant par 2 : $\dfrac{4x-3}{(1-x)(1-2x)} \geqslant 0$

Et comme $(1-x)(1-2x) = (x-1)(2x-1)$, on a finalement : $\dfrac{4x-3}{(x-1)(2x-1)} \geqslant 0$

Nous pouvons maintenant dresser un tableau de signes :

I x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		1		$+\infty$	Calculs et justifications des signes
Signe de $4x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$4x-3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{4}$
Signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$
Signe de $2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$2x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{2}$
Signe du quotient		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$		

Conclusion : $S = \left]\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{3}{4}\right] \cup \left]1\,;+\infty\right[$

Exemple 3 : cas où l'on manipule des inégalités

Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x) = 1{,}1x + \dfrac{1}{x}$. Étudier les variations de g sur $[1\,;+\infty[$. (BAC ES 2001)

SOLUTION : comme dans l'exemple 1, calculons la dérivée g' de g : $g'(x) = 1{,}1 - \dfrac{1}{x^2}$

Réduisons au même dénominateur : $\qquad g'(x) = \dfrac{1{,}1x^2 - 1}{x^2}$

On pourrait factoriser le numérateur puis faire un tableau de signes. Mais, il y a plus simple :

On sait que : $\qquad x \geqslant 1$

En élevant les deux membres "au carré" : $\qquad x^2 \geqslant 1$

On ne change pas le sens de l'inégalité car la fonction $x \longmapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

En multipliant par 1,1 : $\qquad 1{,}1\,x^2 \geqslant 1{,}1 > 1$

D'où : $\qquad 1{,}1\,x^2 - 1 > 0$

On en déduit : $\qquad g'(x) > 0$ pour tout $x \geqslant 1$

La fonction g est donc strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

Exemple 4 : inéquation avec logarithmes et second degré

Résoudre l'inéquation : $\qquad (\ln x)^2 - \ln x - 42 \geqslant 0$

SOLUTION : contrainte : $x > 0$. On pose $X = \ln x$ afin de se ramener à une inéquation du second degré en X :

$$X^2 - X - 42 \geqslant 0$$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 169$ ($a = 1$; $b = -1$ et $c = -42$). On obtient deux racines distinctes :

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -6 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 7$$

Rappel : lorsque $\Delta > 0$, on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

D'où la factorisation : $\qquad X^2 - X - 42 = (X - 7)(X + 6)$

Notre inéquation s'écrit : $\qquad (\ln x - 7)(\ln x + 6) \geqslant 0$

On conclut avec un tableau de signes :

x	0		$\mathbf{e}^{-6}$		$\mathbf{e}^{7}$		$+\infty$	Calculs et justification des signes
signe de $\ln x - 7$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$\ln x - 7 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \geqslant 7 \Leftrightarrow x \geqslant \mathbf{e}^{7}$
signe de $\ln x + 6$	‖	$-$	0	$+$		$+$		$\ln x + 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \geqslant -6 \Leftrightarrow x \geqslant \mathbf{e}^{-6}$
signe du produit	‖	$+$	0	$-$	0	$+$		

Conclusion : $\qquad S = \,]0\,;\ \mathbf{e}^{-6}\,] \cup [\,\mathbf{e}^{7}\,;+\infty[$

Exercices proposés :

1) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\qquad \varphi(x) = \mathbf{e}^{x} - (x+1)$

   Dresser le tableau de variation de φ. En déduire le signe de la fonction φ.

   En déduire que la courbe de la fonction exponentielle est située **au dessus** de la droite d'équation $y = x + 1$.

   (Voir aussi l'exercice proposé n° 1 de la fiche méthode : "positions relatives de deux courbes")

2) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations : $(\mathbf{e}^{x} - 2)(\mathbf{e}^{x} - 3) \geqslant 0$ et $(x^2 - x)\,\mathbf{e}^{x} \geqslant 0$.

3) Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\ln x - 2x$.

   Démontrer que l'on a : $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)(\ln x - 1)}{x^2}$. En déduire le tableau de variation de f.

4) Démontrer que, pour tout $t \in [1\,;2]$, on a : $\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-t^2} \geqslant 0$.