

# COMBINATOIRE & DÉNOMBREMENT

Pour mieux appréhender ce chapitre, il est recommandé de lire celui sur la théorie de ensembles.

Dans tout ce qui suit, nous noterons  $n!$  le produit  $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ , ce produit s'appelle "factorielle  $n$ ". On convient que  $0! = 1$ .

Exercice : démontrer que  $6! \times 7! = 10!$  (sans calculer  $10!$ )

## I) Principes de base du dénombrement

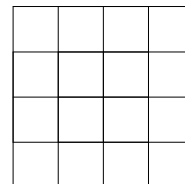
### 1) Principe de la somme

Si des ensembles  $A_1, A_2, \dots, A_p$  constituent une partition d'un ensemble fini  $E$ , alors :

$$\text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_p) = \text{Card}(E)$$

Exemple : Combien y a-t-il de carrés dont les côtés sont matérialisés sur la figure ci-contre ?

Soit  $E$  l'ensemble de tous les carrés. Notons  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  l'ensemble de ces carrés ayant pour côtés respectifs 1, 2, 3 et 4 carreaux. Les sous ensembles  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  constituent une partition de  $E$  (puisque'ils n'ont aucun élément en commun et que leur réunion est  $E$ ).



D'après le principe de la somme,  $\text{Card}(E) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \text{Card}(A_3) + \text{Card}(A_4) = 16 + 9 + 4 + 1 = 30$ .

Il y a donc, au total 30 carrés dont les côtés sont matérialisés sur la figure ci-contre.

### Conséquences

Si  $A$  et  $B$  sont deux parties d'un ensemble fini  $E$ , alors :

- 1)  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$
- 2) Si  $A$  et  $B$  sont disjoints alors :  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$
- 3)  $\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$

### Démonstrations :

Démontrons tout d'abord les points 2) et 3).

2) Les ensembles  $A$  et  $B$  constituent une partition de l'ensemble  $A \cup B$ .

3) Les ensembles  $A$  et  $\bar{A}$  constituent une partition de l'ensemble  $E$ , donc  $\text{Card}(A) + \text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E)$ .

1) Notons  $B \setminus A$  l'ensemble des éléments de  $B$  qui ne sont pas dans  $A$  et  $A \setminus B$ , l'ensemble des éléments de  $A$  qui ne sont pas dans  $B$ . Remarquons que  $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$  (c'est-à-dire  $B \setminus A$  est le complémentaire de  $A \cap B$  dans  $B$ ), donc d'après 3)  $\text{Card}(B \setminus A) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$ . De même,  $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$ . Enfin, remarquons que  $B \setminus A, A \setminus B$  et  $A \cap B$  constituent une partition de  $A \cup B$ , donc  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(B \setminus A) + \text{Card}(A \setminus B) + \text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(A \cap B)$  d'où 1).

Exercice : Dans un camp de vacances hébergeant 80 personnes, 55 personnes pratiquent la natation, 33 le tennis et 16 ne pratiquent aucun de ces deux sports. Combien de personnes pratiquent à la fois le tennis et la natation ?

Notons  $E$  l'ensemble des vacanciers de ce camp,  $T$  l'ensemble des personnes pratiquant le tennis et  $N$  l'ensemble des personnes pratiquant la natation. D'après les données,  $\text{Card}(E) = 80$ ,  $\text{Card}(N) = 33$ ,  $\text{Card}(T) = 55$  et  $\text{Card}(E \setminus (T \cup N)) = 16$ . Nous recherchons  $\text{Card}(T \cap N)$ .

Or  $\text{Card}(E \setminus (T \cup N)) = \text{Card}(E) - \text{Card}(T \cup N) = \text{Card}(E) - \text{Card}(T) - \text{Card}(N) + \text{Card}(T \cap N) = 16$  d'où :

$$\text{Card}(T \cap N) = 16 - \text{Card}(E) + \text{Card}(T) + \text{Card}(N) = 16 - 80 + 33 + 55 = 24.$$

En conclusion, 24 personnes pratiquent à la fois le tennis et la natation.

## 2) Principe du produit (ou principe multiplicatif)

Si une situation comporte  $p$  étapes offrant respectivement  $n_1, n_2, \dots, n_p$  possibilités alors le nombre total d'issues est :

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$$

C'est la règle utilisée lorsque nous dressons un arbre.

Il en découle le cardinal du produit cartésien :

Rappel : Si  $E_1, E_2, \dots, E_p$  sont  $p$  ensembles,  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$  représente le produit cartésien de  $E_1, E_2, \dots, E_p$ , c'est-à-dire l'ensemble des  $p$ -uplets  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  où  $e_1 \in E_1, e_2 \in E_2, \dots, e_p \in E_p$ .

Si  $E_1, E_2, \dots, E_p$  sont  $p$  ensembles de cardinal fini, alors :

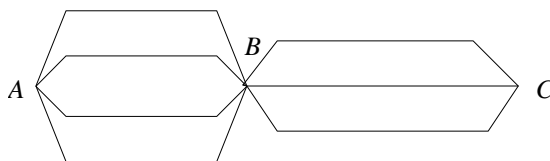
$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_p)$$

Exemples :

- Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?

Les trois étapes : choix de la première lettre, de la deuxième, puis du chiffre offrent respectivement 26, 25 et 9 possibilités. Le nombre cherché est donc  $26 \times 25 \times 9 = 5850$  codes distincts.

- Nombre d'itinéraires distincts menant de A à C ? Nombre d'itinéraires "aller retour" A-C-A n'empruntant que des chemins distincts ?



Aller simple A-C :  $4 \times 3 = 12$

Aller retour A-C-A :  $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$

Tous les principes exposés ci-dessus étant intuitivement évident, nous ne préciserons pas nécessairement, par la suite, quand nous les utiliserons.

## II) Dénombrement des $p$ -listes

Définition 1

Une  $p$ -liste (ou liste de longueur  $p$ ) d'un ensemble  $E$  est un  $p$ -uplet d'éléments de  $E$ . C'est un élément du produit cartésien  $E^p = E \times \dots \times E$  ( $p$  facteurs).

Exemples :

- $E = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 99\}$ . Une 5-liste de  $E$  est par exemple  $(21, 12, 12, 15, 98)$ .
- $E = \{a ; b ; c ; \dots ; z\}$ . Le 6-uplet  $(a, n, a, n, a, s)$  est une 6-liste de  $E$ . En pratique, et lorsque la situation le permet, une  $p$ -liste est tout simplement notée ainsi :  $a n a n a s$ .

Remarques :

- On précise parfois  $p$ -liste "avec répétition" pour les distinguer des arrangements qui seront évoqués au paragraphe suivant.
- On suppose que la 0-liste existe, c'est la liste qui ne comporte aucun élément.

#### Théorème 1

Soit  $E$  un ensemble de cardinal fini  $n$ . Le cardinal de l'ensemble  $E^p$  des  $p$ -listes de  $E$  est  $n^p$ .

La démonstration de ce théorème découle simplement du principe multiplicatif.

Applications :

1) Au loto sportif, on coche l'une des trois cases  $\square$   $\square$   $\square$  pour chacun des 13 matches sélectionnés.

Dénombrer le nombre de grilles distinctes.

Il y en a autant que de 13-listes de l'ensemble  $\{1 ; N ; 2\}$  soit  $3^{13} = 1594323$ .

2) Combien y a-t-il de numéro de téléphone commençant par 0384... ?

Les 6 numéros qui suivent sont des 6-listes de l'ensemble  $\{0 ; 1 ; \dots ; 9\}$ . Il y en a  $10^6 = 1000000$ .

3) Nombre de codes possibles pour une carte bleue ?

Il y en a autant que des 4-listes de  $\{0 ; 1 ; \dots ; 9\}$ . Il y en a  $10^4 = 10000$ .

4)  $n^p$  est le nombre d'applications d'un ensemble de cardinal  $p$  dans un ensemble de cardinal  $n$ . (Pour chacun des  $p$  éléments de l'ensemble de départ, il y a  $n$  choix d'image dans l'ensemble d'arrivée)

### III) Dénombrement des Arrangements et des Permutations

#### Définition 2

Soit  $E$  un ensemble de cardinal fini  $n$  et  $p$  un entier naturel tel que  $0 \leq p \leq n$ .

Un arrangement de  $p$  éléments de  $E$  est une  $p$ -liste d'éléments **distincts** de  $E$ .

Une permutation de  $E$  est un arrangement des  $n$  éléments de  $E$ .

Un arrangement est donc une  $p$ -liste dans laquelle il n'y a pas de répétitions.

Exemples :

- $E = \{a ; b ; c ; \dots ; z\}$ . Les listes suivantes : *beau, matin, hiver* sont des arrangements de 4 et 5 éléments de  $E$ . Par contre, *arrangement* n'est pas un arrangement de 11 éléments de  $E$  car ses éléments ne sont pas distincts.
- Soit  $E = \{s ; u ; c ; r ; e\}$ . Les anagrammes du mot *sucree* sont des permutations de  $E$ .

Remarques : une permutation de  $E$  correspond à une bijection de  $E$ .

#### Théorème 2

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$  et  $p$  un entier naturel tel que  $1 \leq p \leq n$ .

- Le nombre d'arrangements de  $p$  éléments de  $E$  est :

$$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

- Le nombre de permutations de  $E$  est :  $A_n^n = n!$

Et par convention, le nombre d'arrangement de 0 éléments d'un ensemble  $E$  est  $A_n^0 = 1$ .

La démonstration de ce théorème découle simplement du principe multiplicatif.

Remarque : il y a donc  $n!$  bijections d'un ensemble  $E$  de cardinal  $n$  dans lui-même.

Exercice : démontrer que  $A_n^{n-1} = n!$ .

Applications :

1) Le tiercé : une course de chevaux comporte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?

Soit  $E$  l'ensemble des numéros des chevaux. On a  $\text{Card}(E) = 20$ . Un tiercé correspond à un arrangement de 3 éléments de  $E$ , il y en a  $A_{20}^3 = 6840$ .

2) De combien de façons peut-on répartir 7 personnes sur 7 chaises ?

Désignons par  $p_1, p_2, \dots, p_7$  les 7 personnes et posons  $E = \{p_1; p_2; \dots; p_7\}$ . Une répartition peut se voir comme un arrangement des 7 éléments de  $E$  c'est-à-dire une permutation de  $E$ , il y en a  $7! = 5040$ .

3) Un porte manteau comporte 5 patères. De combien de façons peut-on y accrocher 3 manteaux différents ? (Au plus un manteau par patère)

Notons  $P_1, \dots, P_5$  les 5 patères. Chaque rangement peut se voir comme un 3-arrangement de l'ensemble  $\{P_1, \dots, P_5\}$ . Par exemple,  $P_2P_1P_4$  signifie "manteau n°1 sur  $P_2$ , manteau n°2 sur  $P_1$  et manteau n°3 sur  $P_4$ ". Il y a donc  $A_5^3 = 60$  rangements possibles.

4) Nombre de mots de 5 lettres distinctes :  $A_{26}^5$

5) Tirages ordonnés : Une urne contient 10 boules numérotées 0, 1, ..., 10. On en tire successivement trois sans remise. Combien de tirages différents ?  $A_{10}^3$ .

6)  $A_n^p$  est le nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal  $p$  dans un ensemble de cardinal  $n$ . ( $n$  choix d'image pour le premier élément,  $n - 1$  choix pour le second, etc...,  $n - p + 1$  choix pour le dernier).

$A_n^n = n!$  est le nombre le nombre de bijections d'un ensemble de cardinal  $n$  sur lui-même.

#### IV) Dénombrement des Combinaisons

##### Définition 3

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$  et  $p$  un entier naturel tel que  $0 \leq p \leq n$ .

Une combinaison de  $p$  éléments de  $E$  est une partie de  $E$  ayant  $p$  éléments.

##### Exemple :

$E = \{a; b; c\}$  et  $p = 2$ . Les combinaisons de deux éléments de  $E$  sont les parties :  $\{a; b\}$ ,  $\{a; c\}$  et  $\{b; c\}$ .

Il est essentiel de noter que :

- Dans une partie, les éléments sont deux à deux distincts.
- Deux parties qui contiennent les mêmes éléments sont égales. Ainsi  $\{a; b\} = \{b; a\}$ . (L'ordre dans lequel on écrit les éléments n'a pas d'importance)

### Théorème 3

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$  et  $p$  un entier naturel tel que  $0 \leq p \leq n$ .

Le nombre de combinaisons de  $p$  éléments de  $E$  est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Les coefficients  $C_n^p$  sont encore appelés coefficient binomiaux. (On verra pourquoi au paragraphe suivant)

Remarque : bien que les coefficients  $C_n^p$  soient donnés sous forme de fraction, ils sont bien des entiers : en effet l'entier  $A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1)$  est le produit de  $p$  entiers consécutifs. Or, dans  $p$  entiers consécutifs, on en trouve toujours un qui est divisible par  $p$ , un autre divisible par  $p-1$  etc ... donc  $A_n^p$  est divisible par  $p!$ .

Exercice : montrer que  $\sum_{p=0}^{n-2} \frac{n!}{p!}$  est un entier pair.

Démonstration du théorème : dénombrons les arrangements de  $p$  éléments d'un ensemble fini  $E$  de cardinal  $n$ . Un arrangement est caractérisé par :

- Le choix d'une partie de  $E$  à  $p$  éléments ( $C_n^p$  choix)
- La façon d'ordonner les  $p$  éléments de la partie choisie ( $p!$  façons)

Le principe multiplicatif donne alors  $A_n^p = C_n^p p!$  d'où le théorème.

### Interprétation importante

$C_n^p$  représente le nombre de façons de choisir  $p$  objets parmi  $n$  (l'ordre n'important pas).

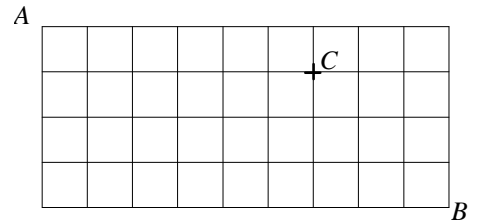
### Applications

- 1) Le loto : On tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages possibles (on ne tient pas compte du numéro complémentaire) ? C'est le nombre de façons de choisir 6 objets parmi 49, soit  $C_{49}^6 = 13983816$ .
- 2) Le Poker : Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard (ces 5 cartes s'appellent une "main").
  - a) Nombre de mains total :  $C_{32}^5 = 201376$
  - b) Nombre de mains qui contiennent exactement 3 as : le nombre de façons de choisir 3 as parmi 4 est  $C_4^3$ , le nombre de façons de choisir 2 cartes parmi 28 "non as" est :  $C_{28}^2$ . On applique le principe multiplicatif, ce qui donne :  $C_4^3 \times C_{28}^2 = 1512$ .
  - c) Nombre de mains qui contiennent au moins 3 as :  $C_4^3 \times C_{28}^2 + C_4^4 \times C_{28}^1 = 1540$ .
- 3) Nombre de dominos (7 numéros) :  $C_7^2 + 7$  (doubles) =  $21 + 7 = 28$ .
- 4) Nombre de comités de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes :  $C_{20}^3 = 1140$ .
- 5) Tirages simultanés ou non ordonnés : une urne contient 10 boules numérotées 0, 1, ..., 10. On en tire simultanément trois. Combien de tirages différents ?  $C_{10}^3 = 120$ .

- 6) Le quadrillage ci-contre (9×4), combien y a-t-il de chemins allant de A à B (on se déplace uniquement vers la Droite ou vers le Bas) ?

Indication : on pourra dénombrer le nombre de mots de 13 lettres qui contiennent 9 fois la lettre **D** et 4 fois la lettre **B**. ( $C_{13}^9 = 715$ )

Combien de ces chemins passent par le point C ? ( $C_7^1 \times C_6^3 = 140$ )



- 7) Nombre de diagonales d'un polygone à  $n$  côtés ?

Nombre de façons de relier 2 sommets :  $C_n^2$ .

Nombre de côtés :  $n$

Nombre de diagonales :  $C_n^2 - n = \frac{n!}{(n-2)!2!} - n = \frac{n(n-1) - 2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$ .

Quel polygone a autant de diagonales que de côtés ?

On résout l'équation  $\frac{n(n-3)}{2} = n$  et on trouve  $n = 0$  (impossible) ou  $n = 5$ . Le pentagone a autant de

diagonales que de côtés et c'est le seul polygone jouissant de cette propriété.

Quel polygone a 1325 diagonales ?

On résout l'équation  $\frac{n(n-3)}{2} = 1325$ . On trouve  $n = 53$  ou  $n = -50$  (impossible). Un 53-gone possède donc

1325 diagonales.

- 8)  $C_n^p$  représente le nombre d'applications strictement croissantes d'un ensemble de cardinal  $p$  dans un ensemble de cardinal  $n$ . En effet, soient  $X$  (resp.  $Y$ ) un ensemble de cardinal  $p$  (resp.  $n$ ) et  $f$  une application strictement croissante de  $X$  dans  $Y$ . Alors  $f$  est nécessairement injective (si deux éléments avaient même image,  $f$  ne pourrait être strictement croissante). Pour construire  $f$ , il faut donc se donner déjà une telle injection ( $A_n^p$  choix). Parmi toutes ces injections, un certain nombre ont la même image  $f(X)$  : il y en a  $p!$  (c'est le nombre de façons de permuter les  $p$  éléments de  $f(X)$ ). Or parmi ces  $p!$  injections de même image  $f(X)$ , une seule est strictement croissante. Le nombre d'applications strictement croissantes de  $X$  dans  $Y$  est donc  $\frac{A_n^p}{p!} = C_n^p$ .

### Propriétés des coefficients binomiaux

#### Propriété 1 Symétrie

Pour tout entier  $n$  et tout entier  $p$  tel que  $0 \leq p \leq n$ , on a :  $C_n^p = C_n^{n-p}$

Démonstration :  $C_n^p$  représente le nombre parties de  $p$  éléments d'un ensemble  $E$ . Or, à chaque partie on peut associer de façon unique une autre partie : son complémentaire. Et le complémentaire d'une partie à  $p$  élément comporte  $n - p$  éléments. Donc dénombrer les parties à  $p$  éléments revient à dénombrer les parties complémentaires à  $n - p$  éléments et il y en a  $C_n^{n-p}$ .

Conséquences :  $C_n^0 = C_n^n = 1$        $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

Exemple : le nombre de façons de choisir 2 délégués parmi 30 élèves est égal au nombre de façons de choisir 28 élèves non délégués parmi 30 :  $C_{30}^2 = C_{30}^{28}$ .

**Propriété 2 Relation de Pascal**

Pour tout entier  $n$  et tout entier  $p$  tel que  $1 \leq p \leq n - 1$ , on a :

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

**Démonstration ensembliste** : Soit  $E$  un ensemble de cardinal fini  $n$  avec  $n \geq 2$ . Soit  $a$  un élément fixé de  $E$ .

Remarquons que les parties à  $p$  éléments de  $E$  se partagent en deux catégories :

- celles ne contenant pas  $a$  (il y en a  $C_{n-1}^p$  : choix de  $p$  éléments parmi  $n - 1$ )
- celles contenant  $a$  (au nombre de  $C_{n-1}^{p-1}$  : choix de  $p - 1$  éléments parmi  $n - 1$ )

Étant en présence d'une partition, le principe de la somme nous livre alors le résultat.

**Démonstration algébrique** :

$$C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} + \frac{(n-1)!p}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$$

**Triangle de Pascal<sup>(1)</sup>**

La relation de Pascal permet de calculer les coefficient binomiaux de la façon suivante : pour trouver un certain coefficient, on additionne dans le tableau suivant les coefficients situés "juste au dessus" et "juste au dessus à gauche" entre eux :

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	...	$p-1$	$p$	...	$n-1$	$n$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
...											
$n-1$	1	$n-1$					$C_{n-1}^{p-1}$	$C_{n-1}^p$		1	
$n$	1	$n$						$C_n^p$		$n$	1

**V) Binôme de Newton**

Ce paragraphe utilise le symbole "somme" :  $\sum_{\text{valeur initiale de l'indice}}^{\text{valeur finale}}$  quantité sommée .

Par exemple,  $1 + x + x^2 + \dots + x^p + \dots + x^n$  pourra être noté de façon plus condensée :  $\sum_{p=0}^n x^p$

**1) Formule du binôme de Newton**

**Théorème 4**

Pour tous nombres complexes  $a$  et  $b$  et tout entier naturel  $n$  non nul :

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p$$

<sup>(1)</sup> Le tableau est appelé triangle de Pascal en hommage à ce dernier qui écrivit en 1654 son "traité du triangle arithmétique" dans lequel il expose d'innombrables applications du triangle déjà connu de Tartaglia (1556), Stiefel (1543) et des Chinois (1303).

Exemples : À l'aide de cette formule et du triangle de Pascal, on retrouve des relations très utiles :

- Avec  $n = 2$  la formule donne :  $(a + b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .
- Avec  $n = 3$  la formule donne :  $(a + b)^3 = \dots = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- Avec  $n = 4$  la formule donne :  $(a + b)^4 = \dots = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ .

Notons qu'il n'est pas inutile de savoir substituer  $(-b)$  à  $b$  dans la formule pour obtenir :

$$(a - b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} (-b)^p = \sum_{p=0}^n (-1)^p C_n^p a^{n-p} b^p$$

En pratique, les signes obtenus en développant cette dernière formule alternent ; par exemple :

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

Il est aussi utile de savoir utiliser la formule avec des valeurs particulières de  $a$  et  $b$  :

- Lorsque  $a = b = 1$  :  $2^n = \sum_{p=0}^n C_n^p = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n$

- Lorsque  $a = 1$  et  $b = x$  :

$$(1 + x)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p x^p = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^p x^p + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n.$$

- Lorsque  $a = 1$  et  $b = -1$  :  $0 = \sum_{p=0}^n C_n^p (-1)^p$

#### Démonstration 1 de la formule du binôme :

En développant le produit  $(a + b)^n = (a + b)(a + b) \dots (a + b)$ , on obtient  $2^n$  termes : en effet, dans chacun des  $n$  facteurs, on a deux choix possibles pour constituer chaque terme qui est une  $n$ -liste d'éléments de l'ensemble  $\{a ; b\}$  (nous n'utilisons pas ici la notation puissance). On peut répartir tous ces termes en fonction du nombre  $p$  de lettres  $b$  qu'ils contiennent ( $0 \leq p \leq n$ ). Les termes contenant  $p$  lettres  $b$  sont de la forme " $a^{n-p}b^p$ " et il y en a  $C_n^p$ . Étant en présence d'une partition, le principe de la somme nous livre alors le résultat.

#### Démonstration 2 de la formule du binôme (par récurrence) :

la formule est évidemment vraie pour  $n = 0$ .

Hypothèse de récurrence : on suppose la formule vraie à un certain rang  $n$ .

Démontrons la formule au rang  $n + 1$  en utilisant le fait qu'elle soit vraie au rang  $n$  :

$$(a + b)^{n+1} = \left( \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i \right) (a + b) = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{(n+1)-i} b^i + \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^{i+1}$$

$$(a + b)^{n+1} = C_n^0 a^{n+1} b^0 + \sum_{i=1}^n C_n^i a^{(n+1)-i} b^i + \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i a^{n-i} b^{i+1} + C_n^n a^0 b^{n+1}$$

$$(a + b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{i=1}^n C_n^i a^{(n+1)-i} b^i + \sum_{i=1}^n C_n^{i-1} a^{(n+1)-i} b^i + b^{n+1} =$$

$$(a + b)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} b^0 + \sum_{i=1}^n [C_n^i + C_n^{i-1}] a^{(n+1)-i} b^i + C_{n+1}^{n+1} a^0 b^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i a^{(n+1)-i} b^i$$

ce qui est la formule du binôme au rang  $n + 1$ .

## 2) Applications

1) Nombre de parties d'un ensemble fini  $E$  de cardinal  $n$  :

Notons  $E_p$  l'ensemble des parties de  $E$  de cardinal  $p$ . Par définition, on a  $\text{Card}(E_p) = C_n^p$ . En outre les ensembles  $E_0, E_1, \dots, E_p, \dots, E_n$  constituent une partition de l'ensemble  $\wp(E)$ . Donc, d'après le principe de la somme :

$$\text{Card}(\wp(E)) = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n = 2^n \quad (\text{formule du binôme avec } a = b = 1)$$

En conclusion, le nombre de parties d'un ensemble de cardinal  $n$  est  $2^n$ .

2) Linéarisation de lignes trigonométriques (ceci facilitera leur intégration). Exemple :

$$\sin^3 x = \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} = -\frac{1}{4} \left( \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} \right) + \frac{3}{4} \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) = -\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin x$$

3) Calcul de  $\cos(n\theta)$  et  $\sin(n\theta)$  en fonction de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ . (Formules de Moivre)

4) Une relation bien utile :  $C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$  (la démonstration est laissée au soin du lecteur)

5) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que  $\sum_{i=1}^k C_{n_1}^i C_{n_2}^{k-i} = C_{n_1+n_2}^k$ .

(Dans un ensemble  $X$  de cardinal  $n_1 + n_2$ , considérer deux sous-ensembles  $E$  et  $F$  **disjoints** de cardinal respectifs  $n_1$  et  $n_2$  et dénombrer de deux façons différentes le nombre de parties à  $k$  éléments de  $E \cup F$ )

6) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $C_{2n+2}^{n+1} (n+1) - 4 C_{2n}^n n = 2 C_{2n}^n$ .

7) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0; n]$ . On considère la fonction  $f_{n,p}$  définie sur  $[0; 1]$  par :

$$f_{n,p}(x) = C_n^p x^p (1-x)^{n-p}$$

Démontrer que :  $0 \leq f_{n,p} \leq 1$  sur  $[0; 1]$ .

(Indication : considérer la somme :  $\sum_{p=0}^n f_{n,p}(x)$ )

8) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

Démontrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

9) Existe-t-il trois coefficients binomiaux successifs sur une même ligne qui soient en progression arithmétique ?

Oui, par exemple :  $C_{14}^4 = 1001$  ;  $C_{14}^5 = 2002$  ;  $C_{14}^6 = 3003$ .

Pour les déterminer tous, étudier la condition :  $2 C_n^p = C_n^{p-1} + C_n^{p+1}$ .

Montrer qu'elle s'écrit encore :  $4p^2 - 4np + n^2 - n - 2 = 0$ .

En déduire alors  $p = \frac{n \pm \sqrt{n+2}}{2}$  et que les couples du type  $(n; p)$  avec  $n = \lambda^2 - 2$  ( $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ ) sont

solutions.