LES NOMBRES COMPLEXES

I) Introduction

L'équation $x + 17 = 16$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{N}$, mais elle en a dans un ensemble plus grand : $\mathbb{Z}$ ($x = -1$). De même, l'équation $3x = 1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$, alors que dans un ensemble plus grand, $\mathbb{Q}$ par exemple, il y en a une : $x = 1/3$. Et puis, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Q}$; il faut chercher dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ pour en trouver.

Bref, quand une équation n'a pas de solutions, une démarche naturelle (et historique) consiste à en chercher dans un ensemble plus grand. Au stade de nos connaissances actuelles, l'ensemble numérique le plus grand que l'on a rencontré est $\mathbb{R}$. Pourtant, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$...

On va donc, dans ce chapitre « construire ? » ou plutôt imaginer un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$ dans lequel l'équation $x^2 + 1 = 0$ a des solutions. On l'appellera $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes. Le principal élément de $\mathbb{C}$ se note $\mathbf{i}$ ($\mathbf{i}$ comme imaginaire). Le nombre $\mathbf{i}$ est tel que $\mathbf{i}^2 = \mathbf{-1}$ **!** L'équation ci-dessus possède alors deux solutions : $x^2 + 1 = 0$ équivaut à $x^2 - \mathbf{i}^2 = 0$ soit $(x - \mathbf{i})(x + \mathbf{i}) = 0$ donc $x = \mathbf{i}$ ou $x = -\mathbf{i}$.

II) Définitions et règles de calcul dans $\mathbb{C}$

<u>Définition 1</u>

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres de la forme $Z = a + b\mathbf{i}$ où $\mathbf{i}^2 = -1$ avec a et b réels.

<u>Vocabulaire</u> : le réel a s'appelle la partie <u>réelle</u> de Z et b la partie <u>imaginaire</u>.

On note : $a = \mathrm{Re}(Z)$ et $b = \mathrm{Im}(Z)$

<u>Exemples</u> : $Z_1 = 3 + 2\mathbf{i}$; $Z_2 = -3\mathbf{i}$

On a : $\mathrm{Re}(Z_1) = 3$; $\mathrm{Im}(Z_1) = 2$; $\mathrm{Re}(Z_2) = 0$; $\mathrm{Im}(Z_2) = -3$

Humour : la vie des hommes est complexe car elle possède une partie réelle et une partie imaginaire.

Attention ! **La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel** !

<u>Théorème 1</u>

Deux nombres complexes $Z = a + b\mathbf{i}$ et $Z' = a' + b'\mathbf{i}$ sont égaux si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$, en remplaçant $\mathbf{i}^2$ par -1.

En particulier, $a + b\mathbf{i} = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$. On parle alors de nombre complexe nul.

<u>Démonstration du théorème 1</u> :

- ♦ Montrons, pour commencer, l'équivalence : $a + b\mathbf{i} = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.
  - Déjà, il est clair que si $a = 0$ et $b = 0$ alors $a + b\mathbf{i} = 0$.
  - Réciproquement, supposons que $a + b\mathbf{i} = 0$. Montrons qu'alors, nécessairement, $a = 0$ et $b = 0$.

    En effet si $b \neq 0$, alors on pourrait écrire : $\mathbf{i} = -\frac{a}{b}$. Le nombre $\mathbf{i}$ serait réel et on ne pourrait avoir $\mathbf{i}^2 = -1$.

    Donc $b = 0$. L'égalité $a + b\mathbf{i} = 0$ se réduit à $a + 0\mathbf{i} = 0$ d'où $a = 0$.

    On a donc montré que si $a + b\mathbf{i} = 0$ alors $a = 0$ et $b = 0$.

♦ Considérons maintenant deux nombres complexes $Z = a + b\mathbf{i}$ et $Z' = a' + b'\mathbf{i}$.

- Il est clair que si $a = a'$ et $b = b'$ alors $Z = Z'$.
- Réciproquement, supposons que $Z = Z'$. Alors, on a : $(a - a') + (b - b')\mathbf{i} = 0$

  Et d'après ce qui précède, $a - a' = 0$ et $b - b' = 0$ d'où $a = a'$ et $b = b'$.

Exemple : $Z_1 = 3 + 2\mathbf{i}$ et $Z_2 = 2 - \mathbf{i}$; calculer $Z_1 + Z_2$; $Z_1 \times Z_2$; $Z_1 - Z_2$; $Z_1 + 2Z_2$; $2Z_1 - 3Z_2$; Z^2.

Théorème 2
L'ensemble $\mathbb{R}$ est un sous ensemble de $\mathbb{C}$.

En effet, tout réel a peut s'écrire $a = a + 0\mathbf{i}$. Les nombres de la forme $b\mathbf{i}$ s'appellent des imaginaires purs.

Remarques :

- Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, il n'y a plus la notion d'ordre usuelle... On ne pourra pas, à ce niveau, comparer un nombre complexe à un autre ou dire s'il est positif ou négatif etc ...
- On évitera l'usage abusif du symbole radical $\sqrt{\ }$ qui reste réservé aux réels positifs.
- Les applications Re : $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ et Im : $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$-linéaires. Cela signifie :

$$\forall Z, Z' \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \mathrm{Re}(Z + \lambda Z') = \mathrm{Re}(Z) + \lambda \mathrm{Re}(Z') \text{ et } \mathrm{Im}(Z + \lambda Z') = \mathrm{Im}(Z) + \lambda \mathrm{Im}(Z')$$

III) Représentation géométrique des nombres complexes

Munissons le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Principe : à tout nombre complexe $Z = a + b\mathbf{i}$, on peut associer le point $M(a ; b)$. Exemples...

Vocabulaire : le point $M(a ; b)$ s'appelle l'image du nombre complexe $Z = a + b\mathbf{i}$.

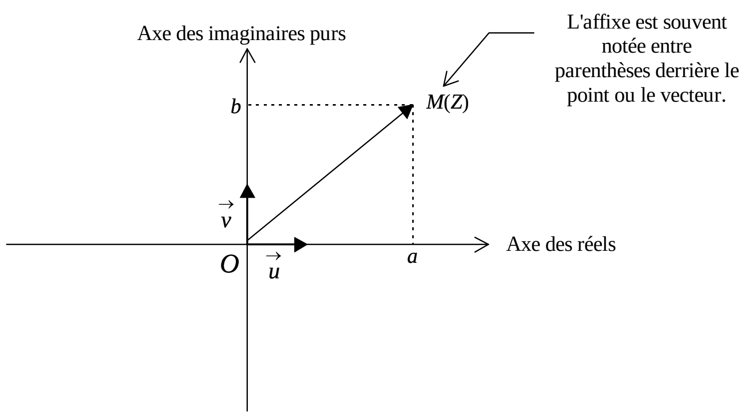
le nombre complexe $Z = a + b\mathbf{i}$ s'appelle l'affixe du point $M(a ; b)$. ("Affixe" est un nom féminin)

on note souvent $Z = \text{affixe}(M)$ ou $Z = \text{aff}(M)$

Autre interprétation : on peut également associer à chaque nombre complexe $Z = a + b\mathbf{i}$ le vecteur $\vec{u}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$

Ce vecteur $\vec{u}$ s'appelle le vecteur image du nombre complexe Z.

Exemple : si $Z = -5 - 2\mathbf{i}$ et M est l'image de Z, alors le vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} -5 \\ -2 \end{vmatrix}$ est le vecteur image de M.



Question : quelle est l'affixe de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $-\vec{u}$ et $-\vec{v}$?

<u>Application</u> : si Z_A est l'affixe de A et Z_B l'affixe de B, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $Z_B - Z_A$:

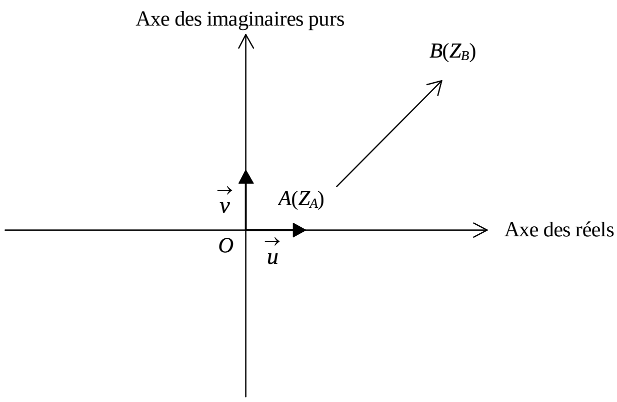
$$\textbf{affixe}(\overrightarrow{AB}) = Z_B - Z_A$$

<u>Démonstration</u> : notons $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$. Alors $Z_A = x_A + y_A\mathbf{i}$ et $Z_B = x_B + y_B\mathbf{i}$.

Nous savons que les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\left|\begin{matrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{matrix}\right.$.

Or, $Z_B - Z_A = x_B + y_B\mathbf{i} - x_A - y_A\mathbf{i} = (x_B - x_A) + (y_B - y_A)\mathbf{i}$.

Donc l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $Z_B - Z_A$.



<u>Exemple</u> : l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec $A(3\,;\,5)$ et $B(5\,;\,8)$ est $Z = 2 + 3\mathbf{i}$.

Ces applications permettent de traduire des problèmes de géométrie en relations entre nombres complexes. Par exemple, on utilisera souvent que deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont mêmes affixes. Ou encore, on utilisera que l'affixe d'une somme de deux vecteurs est la somme des affixes de ces vecteurs :

$$\text{aff}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{aff}(\vec{u}) + \text{aff}(\vec{v})$$

Plus généralement, l'application aff : $P \longrightarrow \mathbb{C}$, où P désigne le plan euclidien, est linéaire :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\text{aff}(\vec{u} + \lambda\vec{v}) = \text{aff}(\vec{u}) + \lambda\text{aff}(\vec{v})$.

IV) Conjugué d'un nombre complexe. Inverse d'un nombre complexe non nul

Soit à mettre sous la forme $a + b\mathbf{i}$ le nombre complexe suivant : $Z = \dfrac{1}{2 + 3\mathbf{i}}$. Comment faire ?

<u>Définition 2</u>

Le nombre complexe conjugué de $Z = a + b\mathbf{i}$ est le nombre complexe $\overline{Z} = a - b\mathbf{i}$.

<u>Exemples</u> : le conjugué de $9 - 4\mathbf{i}$ est $9 + 4\mathbf{i}$. Cas particuliers : $\overline{\mathbf{i}} = \overline{0 + 1\mathbf{i}} = 0 - 1\mathbf{i} = -\mathbf{i}$; $\overline{7} = 7$.

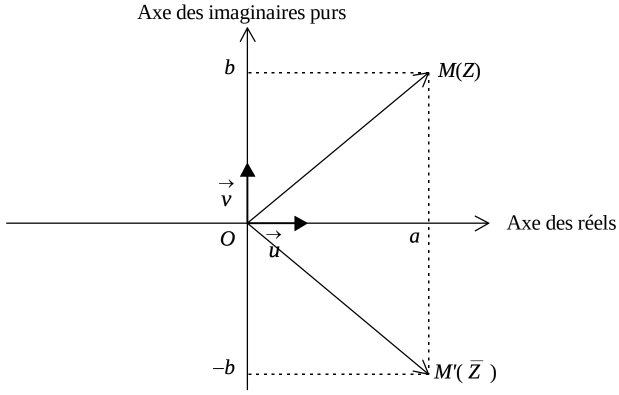
<u>Vocabulaire</u> : on dit que Z et $\overline{Z}$ sont des nombres complexes conjugués.

<u>Remarque</u> : $\text{Re}(Z) = \text{Re}(\overline{Z})$.

<u>Conséquences</u> : on a $Z + \overline{Z} = 2\text{Re}(Z)$ et $Z - \overline{Z} = 2\mathbf{i}\text{Im}(Z)$, d'où les propriétés suivantes :

$$Z \text{ est réel} \Leftrightarrow Z = \overline{Z} \qquad \text{et} \qquad Z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow Z = -\overline{Z}$$

Interprétation géométrique du conjugué : les images de deux nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des réels :



Théorème 3

Pour tout nombre complexe $Z = a + \mathbf{i}b$, la quantité $Z\overline{Z}$ est un nombre réel :

$$Z\overline{Z} = a^2 + b^2.$$

Application : pour écrire les nombres complexes fractionnaires sous la forme $a + b\mathbf{i}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée.

Exemples :

$$\frac{1}{3-4\mathbf{i}} = \frac{3+4\mathbf{i}}{(3-4\mathbf{i})(3+4\mathbf{i})} = \frac{3+4\mathbf{i}}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}\mathbf{i}$$

$$\frac{1-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = -\mathbf{i}$$

Théorème 4

Pour tout nombre complexe Z et Z', on a :

$$\overline{Z+Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'} \qquad \overline{-Z} = -\overline{Z} \qquad \overline{ZZ'} = \overline{Z}\,\overline{Z'} \qquad \overline{Z^n} = \overline{Z}^n \qquad \overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\overline{Z}}{\overline{Z'}} \quad (Z' \neq 0)$$

Démonstration : Posons $Z = a + b\mathbf{i}$ et $Z' = a' + b'\mathbf{i}$. Alors :

$$\overline{Z+Z'} = \overline{a+b\mathbf{i}+a'+b'\mathbf{i}} = \overline{(a+a')+(b+b')\mathbf{i}} = (a + a') - (b + b')\mathbf{i}$$

$$\overline{Z} + \overline{Z'} = \overline{a+b\mathbf{i}} + \overline{a'+b'\mathbf{i}} = a - b\mathbf{i} + a' - b'\mathbf{i} = (a + a') - (b + b')\mathbf{i}$$

Donc $\overline{Z+Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'}$. Les autres égalités se démontrent de façon analogue.

Exemples :

- Le conjugué de $Z_1 = \dfrac{4-5\mathbf{i}}{3+\mathbf{i}}$ est $\overline{Z_1} = \dfrac{4+5\mathbf{i}}{3-\mathbf{i}}$.
- Celui de $Z = \dfrac{2z^2-\mathbf{i}}{5z+1}$ est $\overline{Z} = \dfrac{\overline{2}\,\overline{z^2} - \overline{\mathbf{i}}}{\overline{5}\,\overline{z} + \overline{1}} = \dfrac{2\overline{z}^2 + \mathbf{i}}{5\overline{z}+1}$.

Exercice : déterminer le lieu des points M d'affixe z telle que $\dfrac{\mathbf{i}z-1}{z-\mathbf{i}}$ soit réel.

Solution : pour $z \neq \mathbf{i}$, on a en posant $z' = \dfrac{\mathbf{i}z-1}{z-\mathbf{i}}$:

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z'} = z' \Leftrightarrow \frac{-\mathbf{i}\overline{z}-1}{\overline{z}+\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{i}z-1}{z-\mathbf{i}} \Leftrightarrow (\mathbf{i}\overline{z}+1)(\mathbf{i}-z) = (\mathbf{i}z-1)(\overline{z}+\mathbf{i}) \Leftrightarrow -\overline{z} - \mathbf{i}\,z\overline{z} + \mathbf{i} - z = \mathbf{i}\,z\overline{z} - z - \overline{z} - \mathbf{i}$$

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2\mathbf{i}\,z\overline{z} = 2\mathbf{i} \Leftrightarrow z\overline{z} = 1$$

Notons, $z = a + b\mathbf{i}$, ainsi : $\quad z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$

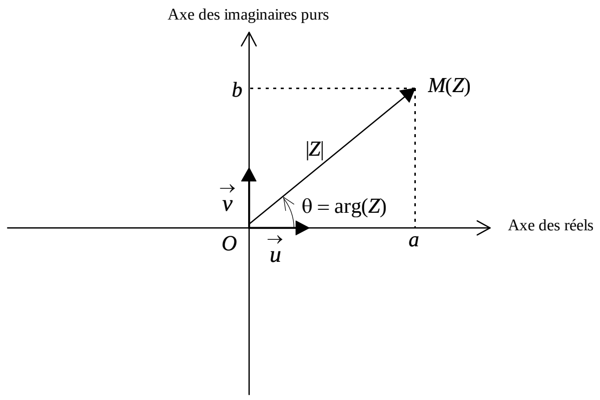
Or, l'ensemble des points $M(a, b)$ pour lesquels $a^2 + b^2 = 1$ est le cercle de centre O et de rayon 1 (cercle unité)

Comme $z \neq \mathbf{i}$, le lieu des points M tels que $\dfrac{\mathbf{i}z-1}{z-\mathbf{i}}$ soit réel est le cercle unité privé du point d'affixe $\mathbf{i}$.

Application du théorème 4 : si un polynôme P admet un nombre complexe Z comme racine alors $\overline{Z}$ est aussi une racine de P puisque, d'après le théorème 4 la conjugaison commute avec les exposants, les produits et la somme : $P(\overline{Z}) = \overline{P(Z)}$ et donc si $P(Z) = 0$ alors $\overline{P(Z)} = 0$ d'où $P(\overline{Z}) = 0$. Exemple : $P(x) = x^2 + x + 1$. On vérifiera que les nombres complexes $\mathbf{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{\mathbf{j}} = -\dfrac{1}{2} - \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont tous deux des racines de P.

V) Module et argument d'un nombre complexe

Voici la figure illustrant les deux définitions suivantes :



Définition 3

On appelle module d'un nombre complexe $Z = a + b\mathbf{i}$ la quantité positive $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

En fait, si Z est l'affixe d'un point $M(a\,;\,b)$, le module de Z n'est autre que la distance OM : $OM = |Z|$.

Si Z est l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$, le module de Z représente la distance AB : $\boldsymbol{AB = |Z_B - Z_A|}$.

Exemples :

- Module de $Z = -3 + 4\mathbf{i}$: $|Z|^2 = 9 + 16 = 25$ donc $|Z| = 5$. Module de $Z = 9\mathbf{i}$: $|Z| = 9$.
- On donne $Z_A = -1 + 3\mathbf{i}$; $Z_B = 2 - \mathbf{i}$. A est l'image de Z_A ; B est l'image de Z_B ; calculer la distance AB :

$$\text{l'affixe du vecteur } \overrightarrow{AB} \text{ est } Z_B - Z_A = 3 - 4\mathbf{i} \text{ donc } AB = |Z_B - Z_A| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

Remarques :

- $|Z| \geqslant 0$ pour tout nombre complexe Z.
- $|Z| = 0$ équivaut à $Z = 0$.
- On a également (d'après le théorème 3) $|Z| = \sqrt{Z\overline{Z}}$ ou encore $|Z|^2 = Z\overline{Z}$.
- Si $Z = a + b\mathbf{i}$ est réel ($b = \text{Im}(Z) = 0$), on a $|Z| = \sqrt{a^2} = |a|$. Le module d'un nombre réel est donc sa valeur absolue, ce qui justifie la notation.

Exercice : Soient $A(0\ ;\ 4)$, $B(3\ ;\ 0)$ et $C(6\ ;\ 8)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Définition 4

On appelle argument d'un nombre complexe Z non nul toute mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

On le note $\theta = \arg(Z)$

Un nombre complexe possède une infinité d'arguments ! Si θ est un argument de Z, tout autre argument de Z est de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'unique argument θ appartenant à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ s'appelle l'argument principal. On notera par exemple $\arg(Z) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$ ou $\arg(Z) = \frac{\pi}{4}$ **modulo** 2π pour signifier que $\arg(Z)$ peut être égal à $\frac{\pi}{4}$ mais aussi égal à n'importe lequel des nombres $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Attention ! Le nombre complexe nul $Z = 0$ ne possède pas d'arguments car, dans ce cas, l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ ne se défini pas.

Exemples : $\arg(\mathbf{i}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$; $\arg(1) = 0\ (2\pi)$; $\arg(-1) = \pi\ (2\pi)$; $\arg(-\mathbf{i}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$; $\arg(1 + \mathbf{i}) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$.

D'un manière générale, un réel positif a un argument nul modulo 2π, un réel négatif a un argument égal à π (2π), un imaginaire pur dont la partie imaginaire est positive a un argument égal à $\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ et enfin un imaginaire pur dont la partie imaginaire est négative a un argument égal à $-\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

Méthode générale pour calculer l'argument principal d'un nombre complexe non nul :

D'après les relations métriques dans le triangle rectangle, on a (voir figure ci-dessus) :

$$\cos\theta = \frac{a}{|Z|} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{b}{|Z|}$$

Si les cosinus et sinus ci-dessus ont des valeurs remarquables, on peut trouver θ directement, sinon, à l'aide d'une calculatrice, on utilise la règle suivante :

"invcos" $\left(\frac{a}{|Z|}\right)$ donne la valeur absolue de θ

$\sin\theta$ donne le signe de θ

Exemples :

- Argument principal θ de $Z = -2\sqrt{3} + 2\mathbf{i}$.

  On a $|Z|^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16$ donc $|Z| = 4$. Nous devons maintenant résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

  Comme nous avons une bonne connaissance du cercle trigonométrique, nous concluons $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$.

- Argument principal θ de $Z = 3 - 4\mathbf{i}$.

  On a $|Z|^2 = 9 + 16 = 25$ donc $|Z| = 5$. Nous devons résoudre le système :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{3}{5} \\ \sin\theta = -\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

  Ce ne sont pas des valeurs remarquables. La calculatrice donne $|\theta| \simeq 0{,}9273$ rad. Mais sin θ est négatif, donc θ est négatif : $\theta \simeq -0{,}9273$ rad.

Théorème 5 *Propriétés des modules*

Pour tous nombres complexes Z et Z' :

Module d'un produit : $|Z \times Z'| = |Z| \times |Z'|$. Et en particulier, si λ est réel : $|\lambda Z| = |\lambda|\,|Z|$.

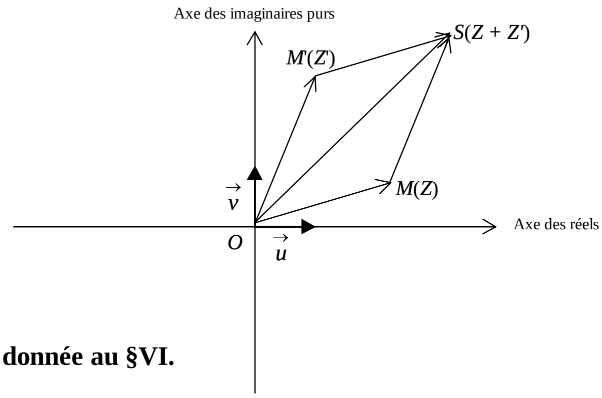
Module d'un quotient : $\left|\dfrac{Z}{Z'}\right| = \dfrac{|Z|}{|Z'|}$ (lorsque $Z' \neq 0$) (et en particulier $\left|\dfrac{1}{Z}\right| = \dfrac{1}{|Z|}$)

Inégalité triangulaire : $|Z + Z'| \leqslant |Z| + |Z'|$

Démonstration : $|Z\,Z'|^2 = Z\,Z'\,\overline{Z\,Z'} = Z\,Z'\,\overline{Z}\;\overline{Z'} = Z\,\overline{Z}\;Z'\,\overline{Z'} = |Z|^2|Z'|^2 = (|Z||Z'|)^2$ donc $|Z\,Z'| = |Z||Z'|$

La deuxième propriété se démontre de façon analogue.

Quant à l'inégalité triangulaire, la figure suivante est plus parlante que n'importe quelle démonstration :



Soient M, M' et S les images respectifs de Z, Z' et $Z + Z'$. On a $OS \leqslant OM + OM'$ donc $|Z + Z'| \leqslant |Z| + |Z'|$.

Une preuve rigoureuse de l'inégalité triangulaire sera donnée au §VI.

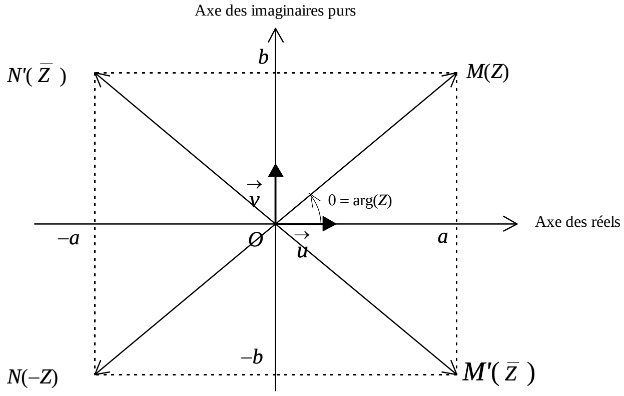
On dit que l'application $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Z \longmapsto |Z|$ est une norme. Cela est dû au fait que l'on a les propriétés suivantes :

- $|Z| \geqslant 0$ pour tout nombre complexe Z.
- $|Z| = 0$ équivaut à $Z = 0$.
- $|\lambda Z| = |\lambda|\,|Z|$ pour tout nombre complexe Z et tout réel λ.
- $|Z + Z'| \leqslant |Z| + |Z'|$ pour tous nombres complexes Z et Z'.

Théorème 6 *Propriétés des arguments*

$\arg(\overline{Z}) = -\arg(Z)\ (2\pi)$ $\arg(-Z) = \arg(Z) + \pi\ (2\pi)$ $\arg(-\overline{Z}) = \pi - \arg(Z)\ (2\pi)$

Ce théorème s'illustre sur la figure suivante :



D'autres propriétés des arguments seront vues plus loin.

Exercice : Soit $Z = x + \mathbf{i}y$ avec $Z \neq 0$. Démontrer que l'on a :

$$\arg(Z) = \pi \text{ si } Z \in \mathbb{R}_-^* \text{ et } \arg(Z) = 2\arctan\left(\frac{y}{|Z| + x}\right) \text{ si } Z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-^*.$$

Soit C le cercle de centre O et de rayon $|Z|$. Soient I, J et M les points d'affixes respectives $|Z|$, $-|Z|$ et Z.

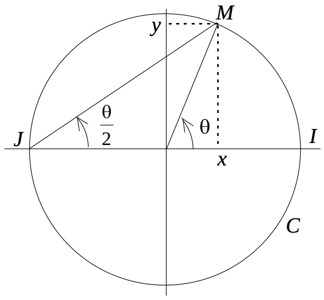
Soit θ un argument de Z. On a donc $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \theta\ (2\pi)$.

D'après le théorème de l'angle au centre, on a :

$2(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JM}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})\ (2\pi)$

D'où : $(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JM}) = \frac{\theta}{2}\ (\pi)$

Pour tout $M \in C \setminus \{J\}$, on a : $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{y}{|Z| + x}$. Si $M = J$, on a : $\theta = \pi$



D'où le résultat.

VI) Différentes formes d'écritures des nombres complexes

L'écriture $\boxed{Z = a + b\mathbf{i}}$ s'appelle **la forme algébrique** de Z (ou encore **forme cartésienne**)

Or, nous avons vu (paragraphe V) que $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$ où $r = |Z|$ et $\theta = \arg(Z)$. Le nombre complexe Z peut donc s'écrire : $\boxed{Z = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)}$; cette écriture s'appelle **une forme trigonométrique** de Z.

Remarque : le nombre complexe nul $Z = 0$ n'a pas de forme trigonométrique (puisque pas d'argument).

Pour trouver une forme trigonométrique d'un nombre complexe Z il suffit de calculer son module et un argument.

Théorème 7

Si $Z = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$ avec $r > 0$ alors $r = |Z|$ et $\theta = \arg(Z)\ (2\pi)$

Démonstration

On a : $$|Z|^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2$$

Or $r > 0$, donc $|Z| = r$.

Soit θ' un argument de Z, alors : $Z = r(\cos \theta' + \mathbf{i} \sin \theta') = r \cos \theta' + \mathbf{i}\, r \sin \theta'$

Or par hypothèse $Z = r(\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta) = r \cos \theta + \mathbf{i}\, r \sin \theta$.

Et d'après le théorème 1, $a' + b'\mathbf{i} = a + b\mathbf{i}$ équivaut à $a' = a$ et $b' = b$ donc $r \cos \theta' = r \cos \theta$ et $r \sin \theta' = r \sin \theta$.

D'où : $$\cos \theta' = \cos \theta \quad \text{et} \quad \sin \theta' = \sin \theta$$

Ce qui implique : $$\theta' = \theta \text{ donc } \theta = \arg(Z)$$

Exercice : déterminer une forme trigonométrique de $Z = -2\left(\cos\frac{\pi}{5} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{5}\right)$. Attention, l'écriture ci-contre n'est pas une forme trigonométrique car un module ne peut être négatif. Transformons :

$$Z = 2\left(-\cos\frac{\pi}{5} - \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{5}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}+\pi\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{5}+\pi\right)\right)$$

Le module de Z est donc $r = 2$ et un de ses arguments est $\theta = \frac{6\pi}{5}$. (Argument principal : $\frac{6\pi}{5} - 2\pi = -\frac{4\pi}{5}$)

Les propriétés suivantes sur les arguments permettront de multiplier et diviser simplement deux nombres complexes :

> Théorème 8 *Propriétés des arguments (bis)*
>
> Pour tous nombres complexes Z et Z' non nuls on a :
>
> $\arg(ZZ') = \arg(Z) + \arg(Z')\ (2\pi)$ $\qquad \arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -\arg(Z)\ (2\pi)$
>
> $\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z')\ (2\pi)$ $\qquad \arg(Z^n) = n \arg(Z)\ (2\pi)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$
>
> On notera l'analogie entre ces relations et les propriétés de la fonction **logarithme**.

Démonstration : utilisons des formes trigonométriques de Z et Z' :

$$Z = r(\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta) \quad \text{et} \quad Z' = r'(\cos \theta' + \mathbf{i} \sin \theta')$$

Ainsi :

$$ZZ' = r\,r'(\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta)(\cos \theta' + \mathbf{i} \sin \theta') = r\,r'(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + \mathbf{i}(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'))$$

Ce qui, d'après les formules trigonométriques d'addition donne :

$$ZZ' = r\,r'(\cos(\theta + \theta') + \mathbf{i} \sin(\theta + \theta'))$$

Et comme $r\,r' > 0$, on en déduit d'après le théorème 7 que :

$$|ZZ'| = r\,r' \quad \text{et} \quad \arg(ZZ') = \theta + \theta' = \arg(Z) + \arg(Z') \quad (2\pi)$$

D'où la première relation.

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)} = \frac{\cos\theta - \mathbf{i}\sin\theta}{r} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + \mathbf{i}\sin(-\theta))$$

D'où : $$\arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -\theta = -\arg(Z)\ \ (2\pi)$$

D'où la seconde relation.

$$\frac{Z}{Z'} = Z \times \frac{1}{Z'} \text{ donc, d'après ce qui précède, } \arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) + \arg\left(\frac{1}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z')\ \ (2\pi)$$

D'où la troisième relation.

Pour la dernière relation, distinguons trois cas :

- $n > 0$: $$\arg(Z^n) = \arg(Z \times Z \times \ldots \times Z) = n \arg(Z)\ \ (2\pi)$$

(Peut se démontrer proprement par récurrence)

- $n < 0$, alors en posant $m = -n > 0$ et en utilisant le cas précédent avec $m > 0$:

$$\arg(Z^n) = \arg\left(\frac{1}{Z^m}\right) = m \arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -m \arg(Z) = n \arg(Z)\ \ (2\pi)$$

- Pour $n = 0$, la relation $\arg(Z^n) = n \arg(Z)\ (2\pi)$ est triviale.

<u>Moralité</u> : pour multiplier deux nombres complexes non nuls, on multiplie les modules et on additionne les arguments. Pour diviser deux nombres complexes non nuls, on divise les modules et on soustrait les arguments.

<u>Exemple</u> :

Soit $Z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ et $Z' = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Calculer ZZ'.

On pourrait s'en tirer avec la trigonométrie classique, mais les théorèmes 5 et 8 livrent directement le résultat :

$$ZZ' = 6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + \mathbf{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

<u>Définition 5</u>

Pour tout réel θ, on note $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta$.

$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ désigne donc le nombre complexe de module 1 et d'argument θ : $|\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}| = 1$ et $\arg(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}) = \theta\ (2\pi)$.

<u>Exemples</u> : $\mathbf{e}^{\mathbf{i}0} = 1$; $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$; $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi} = -1$; $\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\pi} = 1$; $\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{i}$

Un nombre complexe de module r et d'argument θ s'écrit alors $\boxed{Z = r\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}$.

Cette écriture est appelée **une forme exponentielle** de Z.

<u>Remarque</u> : le conjugué de $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ est $\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}$.

Une simple transcription du théorème 8, pour des nombres complexes de module 1 donne alors :

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} \times \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta'} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}(\theta+\theta')} \qquad \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta'}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}(\theta-\theta')} \qquad \left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)^n = \mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}$$

La notation exponentielle rend les calculs très simples, par exemple :

$$\text{Si } Z = 3\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{3\pi}{4}} \text{ et } Z' = 7\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{2\pi}{3}} \text{ alors } ZZ' = 21\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{12}} \text{ et } \frac{Z}{Z'} = \frac{3}{7}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{17\pi}{12}}$$

<u>Exercices</u> :

1) Déterminer la forme algébrique du nombre $Z = \dfrac{(1+\mathbf{i})^4}{(\sqrt{3}-\mathbf{i})^3}$.

   Posons $Z_1 = 1 + \mathbf{i}$ et $Z_2 = \sqrt{3} - \mathbf{i}$.

   Déterminons les formes exponentielles de Z_1 et Z_2 :

   Comme $|Z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg(Z_1) = \dfrac{\pi}{4}$ (2π), on a :

$$Z_1 = \sqrt{2}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$$

   D'où : $$Z_1^4 = 4\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi} = -4$$

   Comme $|Z_2| = 2$ et $\arg(Z_2) = -\dfrac{\pi}{6}$ (2π), on a :

$$Z_2 = 2\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}$$

   D'où : $$Z_2^3 = 8\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = -8\mathbf{i}$$

   Et finalement : $$Z = \frac{Z_1^4}{Z_2^3} = -\frac{1}{2}\,\mathbf{i}$$

2) Calculer $(1 + \mathbf{i})^{14}$.

   Posons $Z = 1 + \mathbf{i}$. On a : $$Z = \sqrt{2}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$$

   D'où : $$Z^{14} = 2^8\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{7\pi}{2}} = 128\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}2\pi}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{3\pi}{2}} = -128\,\mathbf{i}$$

<u>Énigme</u> : où est l'erreur dans le calcul suivant :

$$\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\pi} = 1$$

En élevant à la puissance x : $$\left(\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\pi}\right)^x = 1^x = 1$$

D'où : $$\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\pi x} = 1$$

En particulier pour $x = \dfrac{1}{4}$: $$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = 1$$

D'où : $$\mathbf{i} = 1$$

Réponse : la relation $\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)^n = \mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta}$ n'est pas valable si $n = \dfrac{1}{4}$.

Une démonstration de l'inégalité triangulaire : $\forall\ Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$, $|Z_1 + Z_2| \leqslant |Z_1| + |Z_2|$

Lemme : Pour tous nombres complexes $Z_1 = r_1\,\mathbf{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$ et $Z_2 = r_2\,\mathbf{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, on a : $|\mathrm{Re}(Z_1\,\overline{Z_2})| \leqslant r_1\, r_2$.

Preuve du lemme :

$|\mathrm{Re}(Z_1\,\overline{Z_2})| = |\mathrm{Re}(r_1\, r_2\,\mathbf{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)})| = |\, r_1\, r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)| \leqslant r_1\, r_2$.

Et, en particulier : $\mathrm{Re}(Z_1\,\overline{Z_2}) \leqslant r_1\, r_2$.

On démontre que l'application : $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(Z_1\,;\,Z_2) \longmapsto \mathrm{Re}(\,Z_1\,\overline{Z_2}\,)$

est un produit scalaire sur $\mathbb{C}$. Le lemme n'est alors autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz. L'inégalité triangulaire en découle (voir la leçon sur le produit scalaire)

Démonstration de l'inégalité triangulaire :

$$|Z_1 + Z_2|^2 = (Z_1 + Z_2)\,\overline{(Z_1 + Z_2)} = (Z_1 + Z_2)(\,\overline{Z_1} + \overline{Z_2}\,) = Z_1\,\overline{Z_1} + Z_1\,\overline{Z_2} + Z_2\,\overline{Z_1} + Z_2\,\overline{Z_2} = r_1^2 + (Z_1\,\overline{Z_2} + \overline{Z_1\overline{Z_2}}\,) + r_2^2$$

$$|Z_1 + Z_2|^2 = r_1^2 + 2\,\mathrm{Re}(Z_1\,\overline{Z_2}\,) + r_2^2$$

Et d'après le lemme : $|Z_1 + Z_2|^2 \leqslant r_1^2 + 2\, r_1\, r_2 + r_2^2 \leqslant (r_1 + r_2)^2$

Et par croissance de la fonction racine carrée : $|Z_1 + Z_2| \leqslant |Z_1| + |Z_2|$

Remarque : cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : à quelle condition a-t-on : $|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2|$?

D'après la démonstration faite ci-dessus, on a :

$$|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2| \iff \mathrm{Re}(Z_1\,\overline{Z_2}\,) = r_1\, r_2 \iff \cos(\theta_1 - \theta_2) = 1 \iff \theta_1 - \theta_2 = 0\ (2\pi) \iff \theta_1 = \theta_2\ (2\pi)$$

D'où : $|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2| \iff O$, M_1 et M_2 sont alignés dans cet ordre

VII) Formules de Moivre. Formules d'Euler

Théorème 9

Formules de Moivre : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$

$$(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathbf{i}\sin(n\theta) \qquad (\cos\theta - \mathbf{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) - \mathbf{i}\sin(n\theta)$$

Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathbf{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$ $\qquad \sin\theta = \dfrac{\mathbf{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathbf{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathbf{i}}$

Démonstration : utilisons les formes exponentielles :

$$(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^n = \left(\mathbf{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathbf{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \cos(n\theta) + \mathbf{i}\sin(n\theta)$$

D'où la première formule de Moivre. La seconde est obtenue en remplaçant θ par $-\theta$.

$$\mathbf{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathbf{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta + \cos(-\theta) + \mathbf{i}\sin(-\theta) = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta + \cos(\theta) - \mathbf{i}\sin(\theta) = 2\cos\theta$$

$$\mathbf{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathbf{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta - \cos(-\theta) - \mathbf{i}\sin(-\theta) = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta - \cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta) = 2\,\mathbf{i}\sin\theta$$

D'où les deux formules d'Euler.

Exemples :

1) Linéariser $\sin^3\theta$ et $\cos^4\theta$.

2) Calculer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

3) Démontrer que $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = (x - \mathbf{e}^{\mathrm{i}\theta})(x - \mathbf{e}^{-\mathrm{i}\theta})$.

4) Calculer $\mathrm{Re}\left(\dfrac{\mathbf{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathbf{e}^{\mathrm{i}t} - 1}\right)$ et $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{\mathbf{e}^{\mathrm{i}t} - 1}\right)$. (On trouve $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$)

5) Démontrer que $\mathbf{e}^{2\mathrm{i}\theta} = \dfrac{1+\mathbf{i}\tan\theta}{1-\mathbf{i}\tan\theta}$ pour $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ (2π).

6) Soient u et v deux nombres complexes distincts et de même module r. Alors $\dfrac{u+v}{u-v}$ est imaginaire pur.

7) Démontrer que $\sin(2n+1)t = \sin t\left(1+2\sum_{p=0}^{n}\cos(2pt)\right)$

8) Calculer $\sum_{p=0}^{n}\mathbf{e}^{\mathbf{i}pt}$.

9) On pose $S = \cos p + \cos q$ et $S' = \sin p + \sin q$. Démontrer que $S + \mathbf{i}S' = 2\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{p+q}{2}}\cos\dfrac{p-q}{2}$. En déduire des expressions de S et S' sous forme de produits. Procéder de même avec $T = \cos p - \cos q$ et $T' = \sin p - \sin q$.

VIII) Nombres complexes et géométrie

Dans tout ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Rappelons que si Z_A et Z_B sont les affixes respectives de deux points A et B alors $AB = |Z_B - Z_A|$.

<u>Théorème 10</u>

Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes respectives a, b et c alors :

$$(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\ (2\pi)$$

<u>Démonstration</u> : les affixes des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont respectivement $(a-c)$ et $(b-c)$.

Par définition de l'argument :

$$\arg(a-c) = (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{CA})\ (2\pi) \quad \text{et} \quad \arg(b-c) = (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{CB})\ (2\pi)$$

Or, d'après la relation de Chasles sur les angles :

$$(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{CB}) - (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB})\ (2\pi)$$

Et d'après le théorème 8 sur les arguments :

$$\arg(b-c) - \arg(a-c) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\ (2\pi)$$

Donc :

$$(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\ (2\pi)$$

<u>CAS PARTICULIERS de ce théorème</u> : Il résulte du fait que un argument d'un réel est zéro (modulo π) et que celui d'un imaginaire pur est égal à $\dfrac{\pi}{2}$ (modulo π) que :

- $\dfrac{b-c}{a-c}$ est réel $\Leftrightarrow$ les points A, B et C sont alignés
- $\dfrac{b-c}{a-c}$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires.

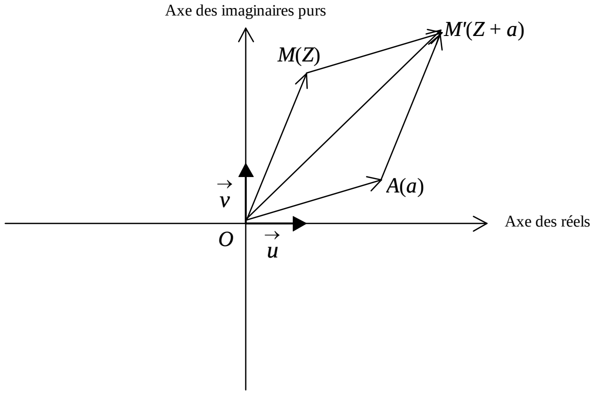
Établissons maintenant le lien entre certaines fonctions complexes et certaines transformations du plan :

Considérons une fonction f définie sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous pouvons associer à cette fonction f la transformation ponctuelle T qui à chaque point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe $f(Z)$.

Théorème 11

Soit a un complexe et $\overrightarrow{OA}$ le vecteur image de a. La transformation ponctuelle associée à la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(Z) = Z + a$ est la **translation** de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

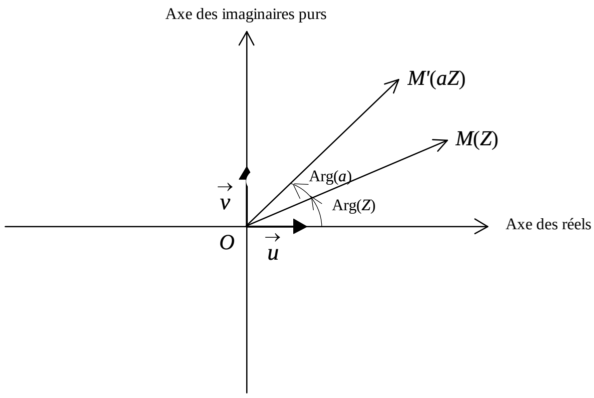
"Ajouter un nombre a c'est translater d'un vecteur d'affixe a"



Théorème 12

Soit $a = \mathbf{e}^{\mathrm{i}\theta}$ un complexe (de module 1). La transformation ponctuelle associée à la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(Z) = aZ$ est la **rotation** de centre O et d'angle θ.

"Multiplier par $\mathbf{e}^{\mathrm{i}\theta}$ c'est faire tourner d'un angle θ autour de O"



En particulier, la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(Z) = \mathbf{i}Z$ s'associe à un quart de tour de sens direct.

Exemple : Soit $\vec{u}\,(x, y)$ un vecteur du plan (non nul) et $\vec{v}\,(x', y')$ tel que $\begin{cases} \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \\ (\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Exprimer les coordonnées de $\vec{v}$ en fonction de celles de $\vec{u}$.

Notons $z = r\,\mathbf{e}^{\mathrm{i}\theta}$ l'affixe de $\vec{u}$ et z' celle de $\vec{v}$.

On a donc : $z' = \mathbf{i}z = \mathbf{i}\,r\,\mathbf{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathbf{i}\,r\,(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta) = r\,(-\sin\theta + \mathbf{i}\cos\theta)$

D'où : $x' = -\,r\sin\theta = -y \quad \text{et} \quad y' = r\cos\theta = x$

LES NOMBRES COMPLEXES ET LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

ÉQUATIONS DU TYPE $x^2 = a$ où a est un réel et x quantité inconnue.

1. Rappeler les solutions de l'équation $x^2 = a$ dans le cas où $a \geqslant 0$.
2. On suppose que $a < 0$. Vérifier que $a = \left(\mathbf{i}\sqrt{-a}\right)^2$. En déduire que l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions complexes que l'on précisera.

L'équation $x^2 = a$ possède deux solutions dans $\mathbb{C}$:

- Si $a \geqslant 0$, ce sont les réels suivants :
- Si $a < 0$, ce sont les imaginaires purs conjugués suivants :

<u>Applications</u> :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$x^2 = -3 \qquad z^2 + \frac{3}{4} = 0 \qquad z^2 = \cos^2\theta - 1 \qquad x + \frac{1}{x} = 0$$

ÉQUATIONS DU TYPE $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$ et x quantité inconnue.

Considérons le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Rappeler les solutions de l'équation $a\,x^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) lorsque $\Delta \geqslant 0$.

   Rappelons (voir cours de Première) que l'équation $a\,x^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) peut s'écrire de manière équivalente :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

2. On suppose que $\Delta < 0$. Vérifier que $\Delta = \left(\mathbf{i}\sqrt{-\Delta}\right)^2$. En déduire que l'équation ci-dessus possède deux solutions complexes que l'on précisera.

L'équation $a\,x^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) possède deux solutions dans $\mathbb{C}$:

- Si $\Delta \geqslant 0$, ce sont les réels suivants :
- Si $\Delta < 0$, ce sont les complexes conjugués suivants :

<u>À RETENIR</u> : Dans $\mathbb{C}$, on peut toujours obtenir la factorisation suivante :

$$\boldsymbol{az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)} \quad \text{où } z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les racines du polynôme } az^2 + bz + c$$

<u>Applications</u> :

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$$2z^2 - 3z + 4 = 0 \qquad x^2 - 2x + 2 = 0 \qquad 2z^4 + z^2 - 10 = 0$$