EXERCICES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1

On considère les équations différentielles E_0 et E_1 suivantes :

$$y'' + 4y = 0 \qquad (E_0)$$

$$y'' + 4y = 3\cos x \qquad (E_1)$$

1. Quelles sont les fonctions g solutions de E_0 ?
2. Vérifier que la fonction "cosinus" est solution de E_1.
3. Soit g une solution de E_0.

   Démontrer que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = g(x) + \cos x$ est solution de E_1.
4. Parmi les fonctions f définies au 3; déterminer celle qui vérifie les conditions : $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$

Exercice 2

On considère les équation différentielles (E_0) et (E_1) définies par :

$$y' + y = 0 \qquad (E_0)$$

$$y' + y = x^2 + x. \qquad (E_1)$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0). (On notera ses solutions g)
2. Déterminer les réels a, b et c tels que le polynôme p défini par $p(x) = a\,x^2 + bx + c$ soit une solution de (E_1).
3. Soit g une solution de (E_0). Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = g(x) + p(x)$ est une solution de (E_1).

Exercice 3

Étudier les problèmes différentiels suivants :

1. $y'' + y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y(\pi) = 0$
2. $y'' + y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y(\pi) = 1$

Exercice 4

1. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante :

$$9y'' + \pi^2 y = 0$$

2. On désigne par f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormal, passe par le point $P(1\,;-\sqrt{2}\,)$ et admet en ce point une tangente horizontale.
   a) Préciser $f(1)$ et $f'(1)$.
   b) Déterminer f.
   c) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{3}(x+2))$.
3. Montrer que f est 6-périodique.
4. Calculer la moyenne quadratique I de f sur [0 ; 6]. (C'est le réel I défini par $I^2 = \frac{1}{6}\int_0^6 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$)