Exercice 1 *Courbes de Gauss*

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. On définit, sur $\mathbb{R}$, la fonction G_k par :

$$G_k(x) = \mathbf{e}^{-kx^2}$$

1. Étudier la parité de G_k.
2. Démontrer que G_k est dérivable et calculer sa dérivée. En déduire le tableau de variation de G_k.
3. Calculer G_k'' et résoudre l'équation $G_k''(x) = 0$.
4. Tracer les courbes de G_k pour $k = \dfrac{1}{2}$, 1 et 2.
5. Démontrer que : $$h \leqslant k \iff G_h \geqslant G_k \text{ sur } \mathbb{R}$$
6. Dans cette question $k = \dfrac{1}{2}$. Soit α la solution positive de l'équation $G_k''(x) = 0$.

   Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de G_k au point d'abscisse α. Tracer T sur le graphique.

Exercice 2 *Quadrature de l'hyperbole*

Soit H la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

(H est une branche d'hyperbole)

Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on note $S(t)$ l'aire du domaine :

$$D(t) = \{M(x, y) \text{ tels que } 1 \leqslant x \leqslant t \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}\}$$

Il s'agit de l'aire situé entre l'axe des abscisses, l'hyperbole H et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$.

1. Soit $t \in [1, +\infty[$.

   Démontrer que pour tout $h > 0$: $$\frac{1}{t+h} \leqslant \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \leqslant \frac{1}{t}$$

   Et pour tout $h < 0$ (tel que $t + h$ reste strictement positif) :

   $$\frac{1}{t} \leqslant \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \leqslant \frac{1}{t+h}$$

   (On pourra interpréter et encadrer l'aire $S(t + h) - S(t)$ par celle de deux rectangles)
2. En déduire que la fonction S est dérivable au point d'abscisse t. Que vaut $S'(t)$?
3. Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

   $$f(t) = S(t) - \ln t$$

   a. Montrer que f est constante.

   b. Calculer $f(1)$ et en déduire que, pour tout $t \in [1, +\infty[$:

   $$S(t) = \ln t$$

Exercice 3 *Constante d'Euler*

On appelle "série harmonique" la suite (H_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

On sait que cette suite diverge (voir le cours sur les suites).

1. a. Tracer dans un repère la courbe de la fonction ln.

   b. Calculer H_1, H_2, H_3, H_4 et H_5. Placer les points de coordonnées (n, H_n) (pour $n = 1, ..., 5$) dans le repère.

   c. Que constate-t-on ?

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$u_n = H_n - \ln n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

Nous allons prouver que la suite (u_n) converge.

2. Démontrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a :

$$\ln(1 + x) \leqslant x$$

   Et que pour tout $x \in]-\infty, 1[$: $\ln(1 - x) \leqslant -x$

3. a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(n + 1) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$\ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

   c. En déduire que la suite (u_n) est positive.

4. a. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

5. Déduire des questions précédentes la convergence de la suite (u_n).

La limite de la suite (u_n) , notée γ, s'appelle la constante d'Euler ($\gamma \simeq 0,577$).

Exercice 4 *Série harmonique alternée*

Soit (S_n) la suite définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $\quad S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}$

Le but de cet exercice est de démontrer que la suite (S_n) converge vers ln 2.

1. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.
2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définie par :

$$u_n = S_{2n} \text{ et } v_n = S_{2n+1}$$

   Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

On note ℓ leur limite commune. Démontrer que (S_n) converge aussi vers ℓ.

3. Dans cette question, $x \in \mathbb{R}_+$.

   a. Démontrer que : $$\sum_{k=1}^{2n}(-x)^{k-1} = \frac{1-(-x)^{2n}}{1+x}$$

   b. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

   $$f(x) = \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

   Calculer la dérivée f' de f et préciser son signe sur $\mathbb{R}_+$. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$.

   Calculer $f(0)$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

   $$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \leqslant \ln(1+x)$$

   c. Démontrer par une méthode analogue à la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

   $$\ln(1+x) \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

   d. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$u_n \leqslant \ln 2 \leqslant v_n$$

   Puis que : $$\ell = \ln 2$$

<u>Exercice 5</u> *Quelques équations différentielles - Applications*

Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants avec second membre

Soient a et b deux réels non nuls. On se propose de résoudre[1], sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' = ay + b$$

où y est une fonction inconnue, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par : $$f(x) = -\frac{b}{a}$$

   Démontrer que f est une solution de (E).

2. Soit g une solution quelconque de (E). Démontrer que $g - f$ est solution de l'équation différentielle :

   $$(E_0) : y' = ay$$

   En déduire que g est de la forme :

   $$g(x) = A\mathbf{e}^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{où } A \text{ est une constante}$$

3. Réciproquement, vérifier que toute fonction y du type :

   $$y(x) = A\mathbf{e}^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{où } A \text{ est une constante}$$

   est bien solution de (E).

[1] Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I, c'est déterminer **toutes** ses solutions sur I.

Équations différentielles de Verhulst : loi logistique continue

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On se propose de rechercher, sur $\mathbb{R}$, certaines solutions[2] de l'équation différentielle suivante :

$$(B) : y' = ay(1 - y)$$

où y est une fonction inconnue, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathbf{0 < y}$ **sur** $\mathbb{R}$.

1. On pose $z = \dfrac{1}{y}$. (Possible car y est supposée ne pas s'annuler)

   Démontrer que z est solution de l'équation différentielle :

$$z' = -az + a$$

2. À l'aide de la partie précédente, en déduire la forme des fonctions z puis des fonctions y.

Application : *Phénomènes d'évolutions : loi de Malthus & loi de Verhulst*

(Le contexte est celui du problème du Bac S 2003)

On considère une culture de bactéries en milieu clos.

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans la culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).

Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- *un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (partie A)*
- *un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (partie B)*

Partie A - Loi de Malthus

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la **vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence**.

Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc la solution de l'équation différentielle :

$$y' = ay.$$

(a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales)

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.

   Démontrer que, pour tout réel t positif : $\quad f(t) = N_0\, 2^{\frac{t}{T}}$
3. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le cas où $N_0 = 0{,}01$ et $a = 0{,}2$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :

Soit $g(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est strictement positive, dérivable sur $[0, +\infty[$ et vérifie pour tout t de $[0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = ay(1 - y)$$

où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales.

[2] Ici, on ne résout pas l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$. On ne fait que rechercher les solutions y qui vérifient $0 < y$ sur $\mathbb{R}$.

1. À l'aide des résultats précédents, déterminer les solutions strictement positives g de (E).
2. a. Sachant $N_0 = 0{,}01$, exprimer $g(t)$ juste en fonction de a.
   b. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'inégalité :
   $$g(t) < 1$$
   c. Étudier le sens de variation de g.
   d. On suppose $a = 0{,}2$. Tracer la courbe représentative de g dans le même repère que précédemment.

Exercice 6 *Étude d'une suite récurrente à l'aide d'une suite auxiliaire*

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 9\mathbf{e} \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n}\text{, pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On pose $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n}{9}\right)$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et la premier terme v_0.
2. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
3. Étudier la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7 *Étude de l'équation* $\ln x = x^n$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \left]0 ; +\infty\right[$ et (E) l'équation : $\ln x = x^n$

1. Dans cette question, $n = 1$. Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\left]0 ; +\infty\right[$, par :
   $$f(x) = x - \ln x.$$
   En déduire, que dans le cas $n = 1$, l'équation (E) n'a aucune solution dans $\left]0 ; +\infty\right[$.
2. Dans cette question, n est quelconque. En choisissant la bonne fonction, démontrer, comme ci-dessus, que l'équation (E) n'a aucune solution dans $\left]0 ; +\infty\right[$, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 *Comparaison entre* x^2 *et* 2^x

Soit f la fonction définie sur $\left]0 ; +\infty\right[$ par : $f(x) = \ln(2^x) - \ln(x^2)$

1. Démontrer que : $f(x) = x \ln 2 - 2 \ln x$
2. Calculer $f(2)$ et $f(4)$.
3. Calculer la dérivée f' de f. En déduire les variations de f.
4. À l'aide des questions 2 et 3, préciser le signe de f.
5. Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a : $2^n \geqslant n^2$.

Exercice 9 *Exercice avec "prise d'initiative"*

Lequel de ces deux nombres est le plus grand ?

$$\mathbf{e}^{\pi} \text{ ou } \pi^{\mathbf{e}}$$

(On peut faire une conjecture à la calculatrice mais on donnera une vraie démonstration)

Exercice 10 *Moyennes arithmétique et géométrique. Comparaison*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n réels positifs $a_1, a_2, ..., a_n$.

On appelle moyenne arithmétique des réels $a_1, a_2, ..., a_n$ le réel A défini par :

$$A = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

On appelle moyenne géométrique des réels $a_1, a_2, ..., a_n$ le réel G défini par :

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

Le but de l'exercice est de prouver que : $G \leqslant A$

1. Démontrer que pour tout réel x : $\mathrm{e}^{x-1} \geqslant x$
2. En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $\mathrm{e}^{\frac{a_i}{A}-1} \geqslant \frac{a_i}{A}$
3. En déduire que : $1 \geqslant \frac{G^n}{A^n}$

   Conclure.

Exercice 1 *Courbes de Gauss*

1. La fonction G_k est définie sur $\mathbb{R}$ qui est en ensemble centré en 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$G_k(-x) = \mathbf{e}^{-k(-x)^2} = \mathbf{e}^{-kx^2} = G_k(x)$$

La fonction G_k est donc paire.

2. La fonction $u : x \mapsto -kx^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle aussi. Donc par composition, la fonction G_k, qui est du type $\mathbf{e}^u$, l'est aussi et on aura $G_k' = u'\,\mathbf{e}^u$, d'où :

$$G_k'(x) = -2kx\,\mathbf{e}^{-kx^2}$$

On en déduit les variations de G_k :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de G_k'		$+$	0	$-$	
Variations de G_k	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$$\lim_{x\to+\infty} G_k(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{-kx^2} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} (-kx^2) = -\infty \text{ puisque } k > 0$$

G_k étant paire, on en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} G_k(x) = 0$

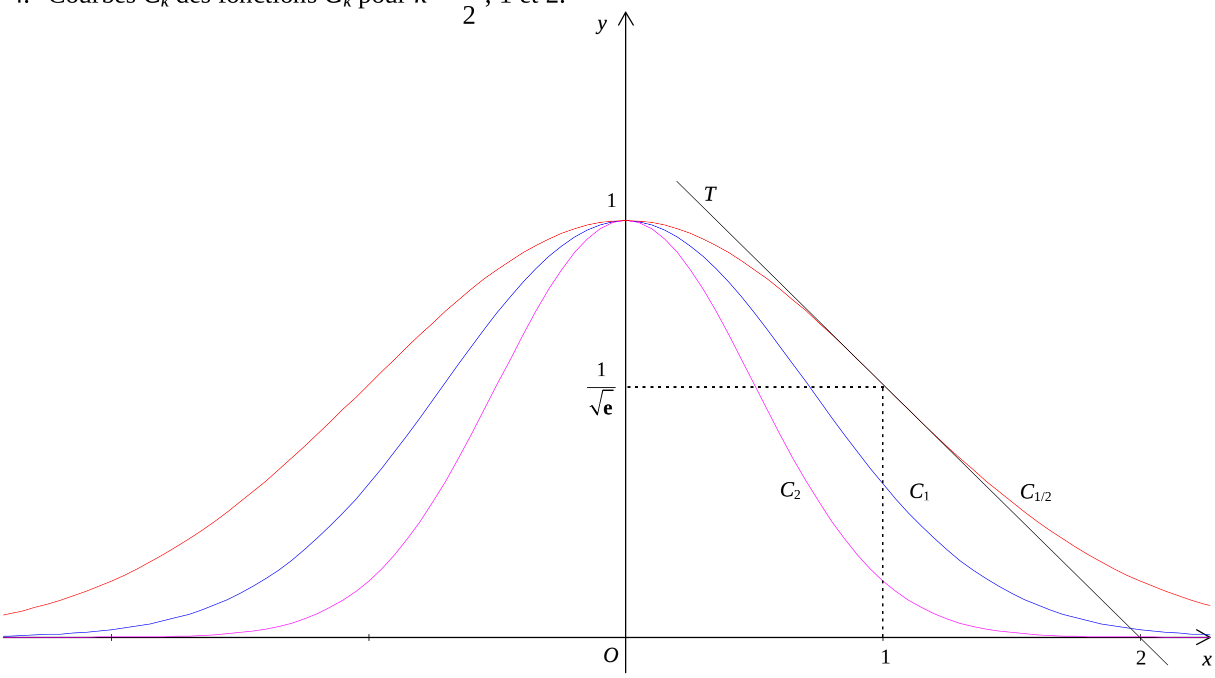
3. La fonction G_k' est du type fg avec $\begin{cases} f(x) = -2kx \\ g(x) = G_k(x) \end{cases}$ où f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Donc G_k' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G_k'' = f'g + fg'$, ce qui donne :

$$G_k''(x) = -2k\,\mathbf{e}^{-kx^2} + 4k^2x^2\,\mathbf{e}^{-kx^2} = 2k\,\mathbf{e}^{-kx^2}(2kx^2 - 1)$$

On a : $\quad G_k''(x) = 0 \Leftrightarrow 2kx^2 - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2k}}$ ou $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$

4. Courbes C_k des fonctions G_k pour $k = \dfrac{1}{2}$, 1 et 2.



5. On a :

$$h \leqslant k \iff -hx^2 \geqslant -kx^2 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \iff \mathbf{e}^{-hx^2} \geqslant \mathbf{e}^{-kx^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \iff G_h \geqslant G_k \text{ sur } \mathbb{R}$$

6. Lorsque $k = \frac{1}{2}$ on a :

$$G_k''(x) = 0 \iff (x = 1 \text{ ou } x = -1)$$

D'où $\alpha = 1$.

Une équation de la tangente T à la courbe de G_k au point d'abscisse $\alpha = 1$ est donnée par :

$$y = G_k(1) + G_k'(1)(x-1)$$

$$y = \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}} - \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}}(x-1)$$

$$y = \frac{2-x}{\sqrt{\mathbf{e}}}$$

Remarque : aux abscisses $\pm \frac{1}{\sqrt{2k}}$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe. On dit alors que la courbe a un "point d'inflexion" (la courbe traverse sa tangente). On peut montrer que le lieu des points d'inflexions des courbes des fonctions G_k est la droite horizontale d'équation $y = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}$ (privée du point d'abscisse 0)

Exercice 2 *Quadrature de l'hyperbole*

1. Lorsque $h > 0$, $S(t+h) - S(t)$ représente l'aire du domaine délimité par H, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = t$ et $x = t + h$.

On a donc :

$$\frac{h}{t+h} \leqslant S(t+h) - S(t) \leqslant \frac{h}{t}$$

$$\frac{1}{t+h} \leqslant \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \leqslant \frac{1}{t}$$

Si $h < 0$, l'aire précédente est maintenant représentée par $S(t) - S(t+h)$ et :

$$\frac{h}{t} \leqslant S(t) - S(t+h) \leqslant \frac{h}{t+h}$$

D'où :

$$\frac{1}{t} \leqslant \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \leqslant \frac{1}{t+h}$$

2. D'après le théorème des gendarmes, l'accroissement moyen $\frac{S(t+h)-S(t)}{h}$ admet donc des limites à droites et à gauches égales à $\frac{1}{t}$, lorsque h tend vers 0. La fonction S est donc dérivable en t et :

$$S'(t) = \frac{1}{t}$$

3. a. La fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$ (puisque différence de fonctions qui le sont) et pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a :

$$f'(t) = S'(t) - \frac{1}{t} = 0$$

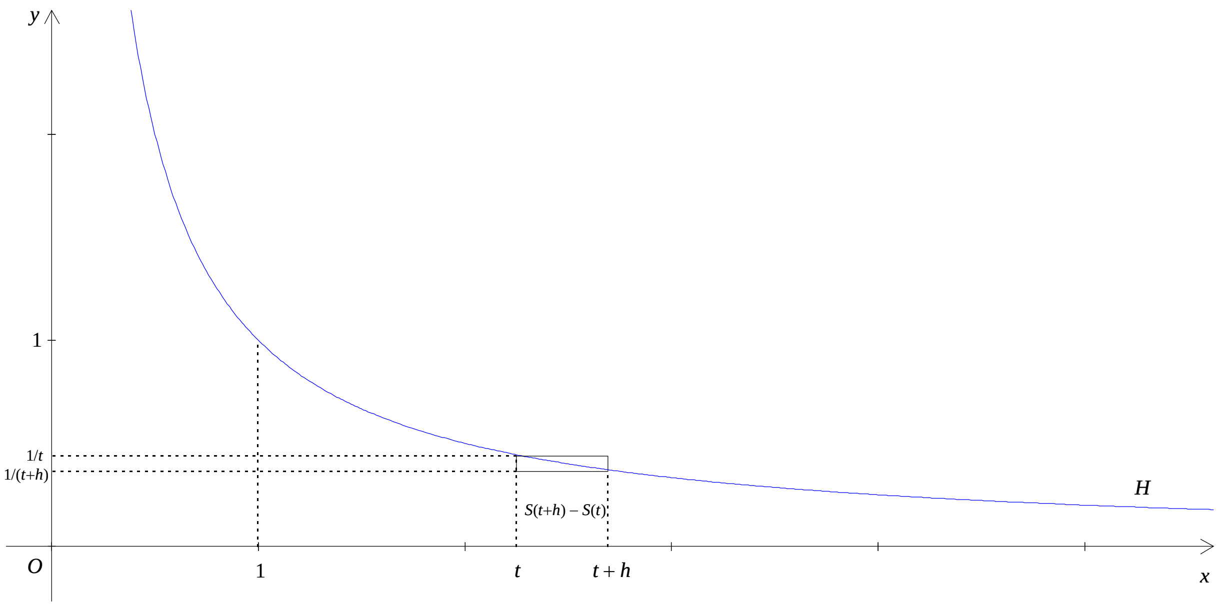
La fonction f est donc constante sur $[1, +\infty[$.

b. Comme $f(1) = S(1) - \ln 1 = 0$, la fonction f est nulle sur $[1, +\infty[$ d'où :

$$S(t) = \ln t$$

Dans cet exercice, on a démontré que

le logarithme de t (lorsque $t \geqslant 1$) est l'aire située sous l'hyperbole (entre les points d'abscisses 1 et t).



Exercice 3 *Constante d'Euler*

1. a. Voir ci-dessous.

b. On a :

$$H_1 = 1$$

$$H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \simeq 1{,}83$$

$$H_4 = H_3 + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} \simeq 2{,}08$$

$$H_5 = H_4 + \frac{1}{5} = \frac{137}{60} \simeq 2{,}28$$

c. On constate que les points (n, H_n) semblent se stabiliser à une hauteur constante au-dessus de la courbe de la fonction logarithme.

2. Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1 + x) - x$$

La fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour tout $x \in \,]-1, +\infty[$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

On a donc : $$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$$

La fonction f est donc croissante sur $]-1, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$.

Elle admet donc un maximum en 0 égal à : $f(0) = 0$

Donc f est négative sur $]-1, +\infty[$, d'où l'inégalité, pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$\ln(1 + x) \leqslant x$$

Soit $x \in]-\infty, 1[$. Posons $X = -x \in]-1, +\infty[$. Alors, d'après l'inégalité ci-dessus :

$$\ln(1 - x) = \ln(1 + X) \leqslant X$$

D'où : $$\ln(1 - x) \leqslant -x$$

3. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \ln(n + 1)$$

   b. Considérons la propriété $\wp$ définie, pour tout entier $n \geqslant 2$, par :

$$\wp(n) : \ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

   - Comme $\ln 2 \leqslant \ln \mathbf{e} \leqslant 1$, on a $\wp(2)$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Supposons $\wp(n)$ Alors :

$$\ln(n + 1) \overset{3.a.}{\leqslant} \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \overset{\wp(n)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \overset{2.}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

   D'où $\wp(n + 1)$.

   Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit $\wp(n)$ pour tout $n \geqslant 2$.

   c. D'après la question précédente, on a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

   C'est-à-dire : $$H_n - \ln n \geqslant 0$$

   De plus, $u_1 = 1$. La suite (u_n) est donc positive.

4. a. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$u_n - u_{n-1} = H_n - \ln n - H_{n-1} + \ln(n - 1) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

   b. Comme, pour $n \geqslant 2$, on a $\frac{1}{n} \in]-\infty, 1[$, la question 2 nous permet d'affirmer :

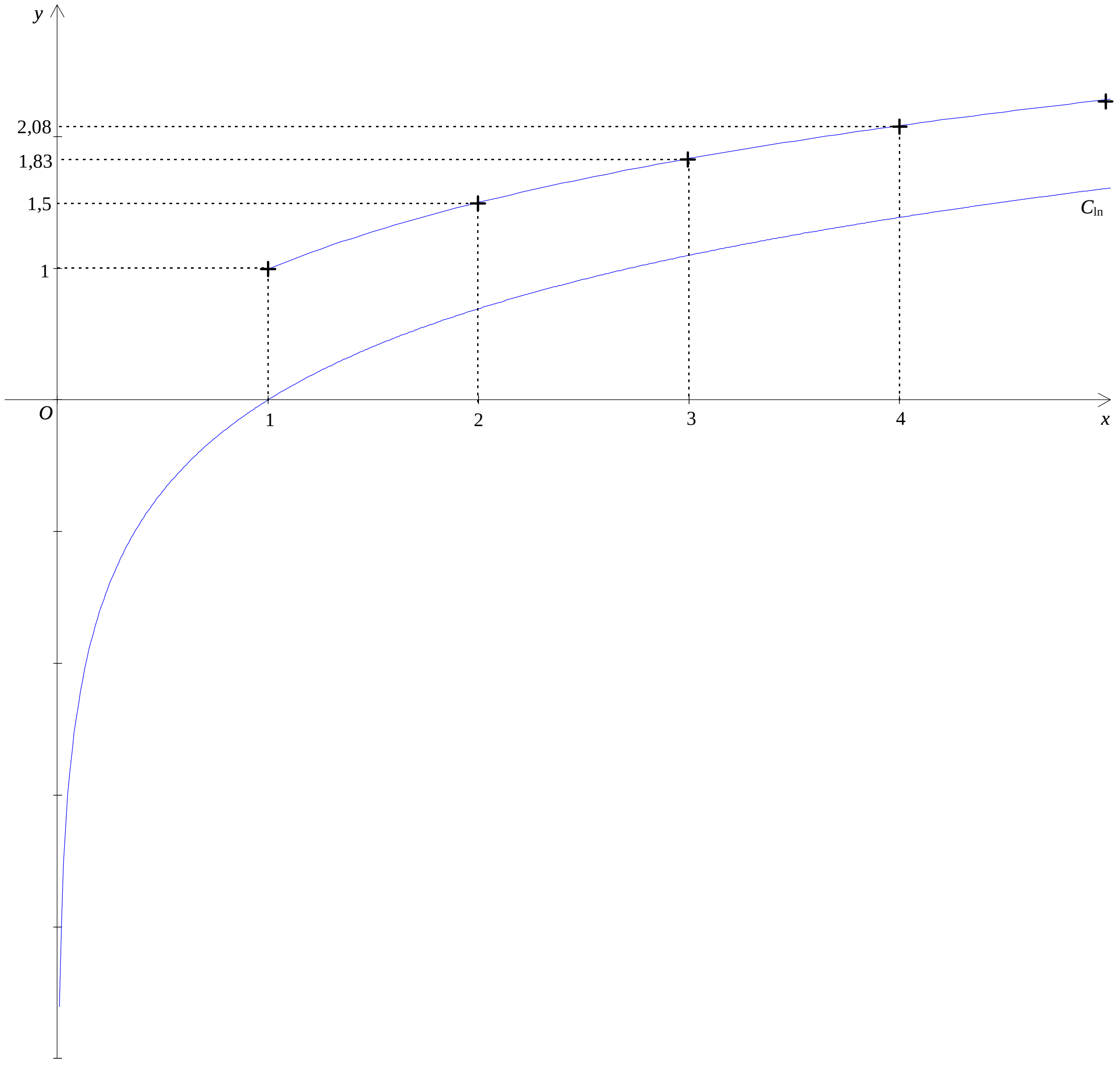
$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{n}$$

   C'est-à-dire : $$u_n - u_{n-1} \leqslant 0$$

   La suite (u_n) est donc décroissante.

5. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

La limite de la suite (u_n) , notée γ, s'appelle la constante d'Euler ($\gamma \simeq 0{,}577$)



Exercice 4 *Série harmonique alternée*

1. On a : $S_1 = 1$, $S_2 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, $S_3 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$ et $S_4 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12}$

2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n - u_n = S_{2n+1} - S_{2n} = \dfrac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$u_{n+1} - u_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geqslant 0 \text{ donc } (u_n) \text{ est croissante}$$

$$v_{n+1} - v_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \leqslant 0 \text{ donc } (v_n) \text{ est décroissante}$$

Ce qui prouve que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Notons ℓ leur limite commune.

Montrons que la suite (S_n) converge aussi vers ℓ :

Soit I un intervalle ouvert, centré en ℓ.

Comme (u_n) converge vers ℓ, il existe un rang N_1 à partir duquel tous les termes u_n sont dans I, c'est-à-dire :

$$p \geqslant N_1 \ \Rightarrow \ S_{2p} \in I$$

Comme (v_n) converge vers ℓ, il existe un rang N_2 à partir duquel tous les termes v_n sont dans I, c'est-à-dire :

$$p \geqslant N_2 \ \Rightarrow \ S_{2p+1} \in I$$

Au delà du plus grand des rangs N_1 et N_2, I contient tous les termes d'indice pair et tous les termes d'indice impair de la suite (S_n). Ce qui prouve que la suite (S_n) converge vers ℓ.

3. a. La quantité $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-x)^{k-1}$ est la somme de $2n$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = -x$.

Comme $q \neq 1$, on a bien :

$$\sum_{k=1}^{2n}(-x)^{k-1} = \frac{1-(-x)^{2n}}{1+x}$$

b. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (en tant que somme de fonctions qui le sont) et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}x^{k-1} = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{2n}(-x)^{k-1}$$

Et d'après la question a. : $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1-(-x)^{2n}}{1+x} = \dfrac{x^{2n}}{1+x} \geqslant 0$

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. Et comme $f(0) = 0$, elle est positive sur $\mathbb{R}_+$.

D'où l'inégalité, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \leqslant \ln(1+x)$$

c. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} - \ln(1+x) = \frac{1-(-x)^{2n+1}}{1+x}$$

Alors, pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}x^{k-1} - \frac{1}{1+x} = = \frac{1-(-x)^{2n+1}}{1+x} - \frac{1}{1+x} = \frac{x^{2n+1}}{1+x} \geqslant 0$$

Donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $g(0) = 0$, elle est positive sur $\mathbb{R}_+$.

D'où l'inégalité, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\ln(1+x) \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

d. En particularisant $x = 1$ dans les deux inégalités précédentes, on obtient :

$$u_n \leqslant \ln 2 \leqslant v_n$$

Et comme les suites (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ, un passage à la limite donne :

$$\ell = \ln 2$$

Exercice 5 *Quelques équations différentielles - Applications*

Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants avec second membre

1. On a, sur $\mathbb{R}$, $f' = 0$ et $af + b = 0$, donc f est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2. On a, sur $\mathbb{R}$:
$$(g - f)' = g' - f' = g' = ag + b = a\left(g + \frac{b}{a}\right) = a(g - f)$$
Donc $g - f$ est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g(x) - f(x) = A\mathbf{e}^{ax} \text{ où } A \text{ est une constante}$$
D'où :
$$g(x) = A\mathbf{e}^{ax} - \frac{b}{a}$$

3. La fonction y proposée est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$y'(x) = Aa\mathbf{e}^{ax} = a\left(y(x) + \frac{b}{a}\right) = ay(x) + b$$
Donc y est bien solution de (E).

Équations différentielles de Verhulst : loi logistique continue

1. On pose $z = \dfrac{1}{y}$. (Possible car y est supposée ne pas s'annuler)

   La fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$z' = -\frac{y'}{y^2} = \frac{ay(y-1)}{y^2} = a - \frac{a}{y} = a(1 - z) = -az + a$$

2. À l'aide de la partie précédente, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$z(x) = A\mathbf{e}^{-ax} + 1 \text{ où } A \text{ est une constante}$$
D'où :
$$y(x) = \frac{1}{1 + A\mathbf{e}^{-ax}}$$

Application : *Phénomènes d'évolutions : loi de Malthus & loi de Verhulst*

Partie A - Loi de Malthus

1. On a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $$f(t) = N_0\mathbf{e}^{at}$$
2. Par définition de T : $$f(T) = 2N_0 = N_0\mathbf{e}^{aT}$$
   D'où : $$T = \frac{\ln 2}{a}$$
   On en déduit : $$f(t) = N_0\, e^{\frac{t}{T}\ln 2} = N_0\, 2^{\frac{t}{T}}$$
3. Voir ci-dessous.

Partie B

1. D'après les résultats précédents :
$$g(t) = \frac{1}{1 + A\mathbf{e}^{-at}} \text{ où } A \text{ est une constante}$$
2. a. On a : $$0{,}01 = N_0 = g(0) = \frac{1}{1 + A}$$

D'où : $A = 99$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a donc : $g(t) = \dfrac{1}{1+99\mathbf{e}^{-at}}$

b. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbf{e}^{-at} = 0$, il vient : $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 1$

De plus : $1 + 99\,\mathbf{e}^{-at} > 1$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $[1, +\infty[$:

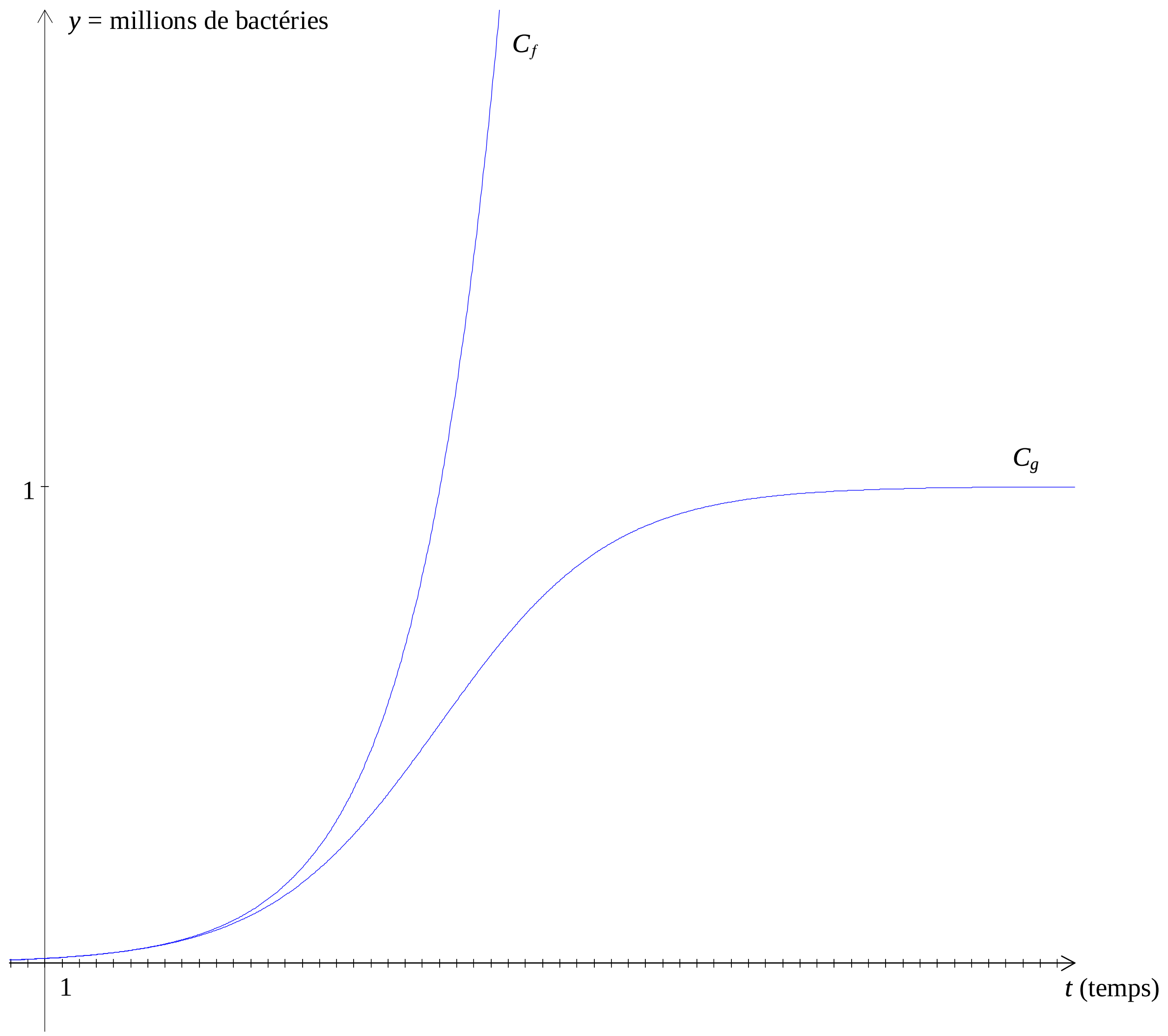
$$g(t) < 1 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+$$

c. Puisque $0 < g < 1$ sur $\mathbb{R}_+$, $a > 0$ et $g' = ag(1-g)$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit :

$$g' > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

d.



On constate que le premier modèle (de Malthus) n'est pas bon (sauf au début) car les bactéries se développant en milieu confiné, elles ne peuvent pas se multiplier infiniment. Le second modèle (de Verhulst) a l'avantage de bien faire apparaître un comportement asymptotique particulier (le nombre de bactéries fini par se stabiliser). En effet, les ressources en éléments nutritifs étant limitées, le nombre de bactéries tend à se stabiliser.

Exercice 6 *Étude d'une suite récurrente à l'aide d'une suite auxiliaire*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{9}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{u_n}}{3}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{u_n}{9}}\right) = \frac{1}{2}\ \ln\left(\frac{u_n}{9}\right) = \frac{1}{2} v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. Son premier terme est $v_0 = \ln(\mathbf{e}) = 1$.

2. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = q^n v_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or : $$u_n = 9\,\mathbf{e}^{v_n}$$

D'où : $$u_n = 9\,\mathbf{e}^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

3. On a : $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ (suite géométrique de raison } q = \frac{1}{2} \in \,]-1, 1[)$$

D'où $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 9$$

Exercice 7 *Étude de l'équation* $\ln x = x^n$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \,]0\,;+\infty[$ et (E) l'équation : $\ln x = x^n$

1. Ce travail a déjà été fait en cours. On a obtenu :

$$\ln x < x \text{ pour tout } x \in \,]0, +\infty[$$

L'équation (E) n'admet donc pas de solution dans le cas $n = 1$

2. On considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n - \ln x$$

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (différence de deux fonctions qui le sont) et pour tout $x \in \,]0, +\infty[$:

$$f'_n(x) = n\,x^{n-1} - \frac{1}{x} = \frac{nx^n - 1}{x}$$

On a, pour $x \in \,]0, +\infty[$:

$$f'_n(x) \geqslant 0 \iff n\,x^n - 1 \geqslant 0 \iff x^n \geqslant \frac{1}{n} \overset{x>0}{\iff} x \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$$

(La dernière inégalité étant une conséquence de la croissance de l'application $t \mapsto t^\alpha$ sur $]0, +\infty[$ lorsque $\alpha > 0$)

Notons $\alpha_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$. Ainsi f est croissante sur $[\alpha_n, +\infty[$ et décroissante sur $]0, \alpha_n]$.

Elle admet donc un minimum en α_n qui est :

$$f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} = \frac{1+\ln n}{n} > 0 \text{ (car } n \in \mathbb{N}^*)$$

Donc f_n est donc strictement positive sur $]0, +\infty[$.

L'équation (E) n'admet donc pas de solutions, ceci quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 *Comparaison entre x^2 et 2^x*

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(2^x) - \ln(x^2)$

1. D'après les règles de calculs sur les logarithmes :

$$f(x) = x \ln 2 - 2 \ln x$$

2. $f(2) = \ln 4 - \ln 4 = 0$ et $f(4) = \ln 16 - \ln 16 = 0$

3. On a : $$f'(x) = \ln 2 - \frac{2}{x} = \frac{x \ln 2 - 2}{x}$$

   Comme $x > 0$, on a : $$f'(x) \geqslant 0 \iff x \ln 2 - 2 \geqslant 0 \overset{\ln 2 > 0}{\iff} x \geqslant \frac{2}{\ln 2}$$

   On en déduit les variations de f.

x	0		2		$\frac{2}{\ln 2}$		4		$+\infty$
Signe de f'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	m	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. On en déduit : $$f(x) \leqslant 0 \iff x \in [2\ ;4]$$

5. Recherche des entiers n pour lesquels on a : $2^n \geqslant n^2$

   C'est-à-dire : $f(n) \geqslant 0$

$$n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$$

Exercice 9 *Exercice avec "prise d'initiative"*

La calculatrice donne : $\pi^{\mathbf{e}} \simeq 22{,}46$ et $\mathbf{e}^{\pi} \simeq 23{,}14$ à 10^{-2} près

On sait que pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\ln x \leqslant x - 1$$

(Voir le cours ou étudier les variations de la fonction "différence" pour retrouver ce résultat)

En spécialisant $x = \frac{\pi}{\mathbf{e}}$, on obtient : $$\ln\left(\frac{\pi}{\mathbf{e}}\right) \leqslant \frac{\pi}{\mathbf{e}} - 1$$

$$\ln \pi - 1 \leqslant \frac{\pi - \mathbf{e}}{\mathbf{e}}$$

$$\mathbf{e} \ln \pi - \mathbf{e} \leqslant \pi - \mathbf{e}$$

$$\ln(\pi^{\mathbf{e}}) \leqslant \pi$$

D'où : $$\boldsymbol{\pi^{\mathbf{e}} \leqslant \mathbf{e}^{\pi}}$$

Exercice 10 *Moyennes arithmétique et géométrique. Comparaison*

1. On étudie les variations de la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \mathbf{e}^{x-1} - x$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = \mathbf{e}^{x-1} - 1$$

On en déduit, par croissance du logarithme, que :

$$f'(x) \geqslant 0 \iff \mathbf{e}^{x-1} \geqslant 1 \iff x - 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$$

D'où les variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de f'		$-$	0	$+$	
Variations de la fonction f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

La fonction f admet donc, sur $\mathbb{R}$, un minimum en 1 et :

$$f(1) = \mathbf{e}^0 - 1 = 0$$

Comme ce minimum est nul, la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a bien :

$$\mathbf{e}^{x-1} \geqslant x$$

2. En spécialisant, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, l'inégalité précédente avec $x = \dfrac{a_i}{A}$, on obtient :

$$\mathbf{e}^{\frac{a_i}{A}-1} \geqslant \frac{a_i}{A}$$

3. En multipliant, membre à membre les inégalités ci-dessus (tous les membres sont positifs), il vient :

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbf{e}^{\frac{a_i}{A}-1} \geqslant \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A}$$

Et comme l'exponentielle transforme les sommes en produit, on peut écrire :

$$\mathbf{e}^{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{A}-1\right)} \geqslant \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{A^n}$$

$$\mathbf{e}^{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{A}-n} \geqslant \frac{G^n}{A^n}$$

Et puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A} - n = 0$, il vient : $\quad 1 \geqslant \dfrac{G^n}{A^n}$

On a donc : $\quad A^n \geqslant G^n$

Par croissance du logarithme (les quantités en jeu étant strictement positives) :

$$\ln(A^n) \geqslant \ln(G^n)$$

D'après les propriétés du logarithme : $n \ln A \geqslant n \ln G$

Comme n est non nul : $\ln A \geqslant \ln G$

Et enfin par croissance de l'exponentielle : $A \geqslant G$