EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 *Une démonstration des formules d'Euler*

1. Démontrer que pour tout nombre complexe Z, on a :

$$Z + \overline{Z} = 2\,\mathrm{Re}(Z) \qquad \text{et} \qquad Z - \overline{Z} = 2\,\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(Z)$$

2. En déduire une démonstration des formules d'Euler.

Exercice 2 *Des pistes pour démontrer qu'un complexe est réel ou imaginaire pur*

Démontrer les équivalences suivantes :

$$Z \text{ réel} \Leftrightarrow Z = \overline{Z} \Leftrightarrow \arg(Z) = 0\ (2\pi) \text{ ou } \arg(Z) = \pi\ (2\pi)$$

$$Z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow Z + \overline{Z} = 0 \Leftrightarrow \arg(Z) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \text{ ou } \arg(Z) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$$

Exercice 3 *Application de l'exercice 2*

1. Comment choisir le nombre complexe z pour que $Z = z^2 + 2z - 3$ soit réel ?
2. Soit E l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que Z soit réel. Représenter E.

Exercice 3 *Différentes formes d'écriture*

1. Compléter le tableau suivant : (Détailler les calculs)

	Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
Z_A			$4\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}$
Z_B		$4(\cos \frac{5\pi}{6} + \mathbf{i} \sin \frac{5\pi}{6})$	
Z_C	$2\sqrt{3} - 2\mathbf{i}$		

2. Placer les points A, B et C images respectives des nombres complexes Z_A, Z_B et Z_C dans un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$.
3. Calculer les affixes Z et Z' des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sous forme algébrique puis exponentielle.
4. Montrer que $Z' = \sqrt{3}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}\ Z$.

Exercice 4 *Système "somme produit"*

Résoudre le système suivant (dans $\mathbb{C}$) : $\begin{cases} u + v = 2 \\ uv = 50 \end{cases}$

Exercice 5 *Fonction complexe et interprétation géométrique*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + \mathbf{i})z^2 + 4(1 + \mathbf{i}\sqrt{3})z - 8\mathbf{i}$.

1. Vérifier que $f(z) = (z - 2\mathbf{i})(z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. Écrire les solutions z_1, z_2 et z_3 sous forme algébrique et exponentielle.

3. Représenter dans le plan complexe les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 et démontrer qu'ils sont sur un même cercle de centre O.
4. Quelle est la nature du quadrilatère $OM_1M_2M_3$?

Exercice 6 *Lieux de points*

Soit z un nombre complexe différent de 1. On note M le point du plan complexe d'affixe z. On pose $Z = \dfrac{2\mathbf{i}z+1}{z-1}$.

1. Déterminer l'ensemble :
   a) E des points M tels que Z soit réel.
   b) F des points M tels que $|Z| = 2$.
2. Représenter les ensembles E et F dans un même repère orthogonal.

Exercice 7 *Fonction complexe et transformation du plan*

On note E l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z-1| = 1$ et f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = \mathbf{i}z$.

1. Déterminer E et dessiner sa représentation $\mathscr{C}$ dans le plan complexe.
2. Quelle est la transformation géométrique T associée à f ?
3. Quelle est l'image de $\mathscr{C}$ par T ?
4. En déduire que l'image de E par f est l'ensemble E' des nombres complexes z' tels que $|z' - \mathbf{i}| = 1$.

Exercice 8 *Sujet BAC*

1. Déterminer dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. Écrire ces solutions sous forme exponentielle.

   Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal de sens direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère la transformation T du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{3}}z.$$

2. Caractériser la transformation T.
3. Soit M_1 le point d'affixe $z_1 = -\sqrt{3} + \mathbf{i}$. Déterminer les affixes respectives z_2 et z_3 des points M_2 et M_3 tels que $M_2 = T(M_1)$ et $M_3 = T(M_2)$.
4. Construire les points M_1, M_2 et M_3.
5. Calculer $\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$. En déduire la nature du triangle $M_1M_2M_3$.

Exercice 8 *Utilisation des nombres complexes pour établir une propriété algébrique*

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On suppose que a et b sont la somme de deux carrés :

$$\exists x, y \in \mathbb{Z} \text{ tels que } a = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad \exists z, t \in \mathbb{Z} \text{ tels que } b = z^2 + t^2$$

Démontrer que le produit ab est encore la somme de deux carrés. (Idée : écrire $\left(x^2 + y^2\right) = |x + \mathbf{i}y|^2$ etc...)

Exercice 9 *Identité du parallélogramme*

Démontrer que pour tous nombres complexes Z et Z', on a : $|Z + Z'|^2 + |Z - Z'|^2 = 2|Z|^2 + 2|Z'|^2$

(Indication : utiliser la relation : $|Z|^2 = Z\overline{Z}$.)

Exercice 10

Démontrer que : $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $|\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} - 1|^2 = 2 - 2\cos\theta$.

Exercice 11

Soit $z = x + \mathbf{i}y$ un nombre complexe distinct de -1. (x et y sont des réels). On note M le point du plan d'affixe z.

On pose
$$Z = \frac{\mathbf{i}z}{z+1}$$

1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.
2. En déduire l'ensemble E des points M tels que $\mathrm{Re}(Z) = 0$ et l'ensemble F des points M tels que $\mathrm{Im}(Z) = 0$.

Exercice 12

On considère les points A et B d'affixes respectives $\mathbf{i}$ et 1. Soit M un point du plan d'affixe z distinct de A.

On pose
$$Z = \frac{1-z}{\mathbf{i}-z}$$

1. Déterminer l'ensemble E des points M tels que Z soit réel.
2. Déterminer l'ensemble F des points M tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \left(-\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 3\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}$ et $z_B = 3\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}$. On note A' et B' leurs images respectives par f.

1. Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
2. Déterminer sous forme exponentielles les affixes $z_{A'}$ et $z_{B'}$ des points A' et B'.
3. Démontrer que les points A, B, A' et B' sont sur le cercle Γ de centre O et de rayon 3.
4. Calculer $\arg\left(\frac{z_{A'}}{z_B}\right)$. En déduire l'alignement des points A', B et O puis la nature du triangle ABA'.

Exercice 14

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2\mathbf{i}$, $b = -\sqrt{3} + \mathbf{i}$ et $c = -\sqrt{3} - \mathbf{i}$.

1. Écrire a, b et c sous forme exponentielle. Placer A, B et C sur une figure.
2. Soit $Z = \frac{a-b}{c-b}$
   a) Écrire Z sous forme algébrique puis exponentielle.
   b) En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 15

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 = 1$.
2. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 = -1$.
3. En déduire une factorisation du polynôme $z^4 + 1 = 0$ en produit de deux polynômes à coefficients réels du second degré.

Exercice 16

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 3 cm).

On désigne par A le point d'affixe $\mathbf{i}$.

À tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{z^2}{\mathbf{i} - z}$$

1. Déterminer les points M confondus avec leur image M'.
2. Étant donné un complexe z distinct de $\mathbf{i}$, on pose : $z = x + \mathbf{i}y$ et $z' = x' + \mathbf{i}y'$ avec x, y, x', y' réels.

   Montrer que :

   $$x' = \frac{-x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1-y)^2}.$$

   En déduire l'ensemble E des points M dont l'image M' est située sur l'axe des imaginaires purs. Dessiner l'ensemble E.
3. Trouver une relation simple liant les longueurs OM, AM et OM'. En déduire l'ensemble F des points M du plan tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O. Dessiner F.
4. Dans toute cette question, on considère un point M d'affixe z, situé sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$.

   M' est le point d'affixe z' correspondant, et G l'isobarycentre des points A, M et M'.

   Calculer l'affixe z_G de G en fonction de z.

   Montrer que G est situé sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon. Après avoir comparé les angles $(\vec{u}, \overrightarrow{OG})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$, effectuer la construction de G. En déduire celle de M'.

Exercice 17

On considère les deux nombres complexes suivants :

$$z_1 = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$$

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. Déterminer les écritures sous formes algébrique, exponentielle et trigonométrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
3. En déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus suivants :

$$\cos\frac{\pi}{12} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12}$$

Exercice 18

On considère le polynôme P, défini sur $\mathbb{C}$, par $P(z) = z^4 + 1$.

1. Vérifier que $z_0 = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$ est une racine du polynôme P. En déduire une autre racine z_1.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(z) = Q(z)(az^2 + bz + c)$ où Q est un polynôme de degré 2 que l'on précisera.
3. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 19

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$a = -1 + \mathbf{i}\ ;\ b = -1 - \mathbf{i}\ ;\ c = 2\mathbf{i}\ ;\ d = 2 - 2\mathbf{i}$$

1. Placer les points A, B, C et D.
2. Écrire les nombres complexes $\dfrac{c-a}{d-a}$ et $\dfrac{c-b}{d-b}$ sous forme algébrique puis exponentielle.
3. En déduire la nature des triangles ACD et BCD.
4. Montrer que A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 20

Pour connaître le but de cet exercice, se reporter à la question 6.

1. Résoudre, dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, le système suivant :

$$\begin{cases} u + v = -\dfrac{1}{2} \\ uv = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

2. Dans tout cette question, on pose $\omega = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{5}}$.
   a) Calculer (sous forme exponentielle) les racines cinquièmes de l'unité.
   b) Démontrer que $\omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
3. En déduire (à l'aide des formules d'Euler) que $\cos(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{4\pi}{5}) = -\frac{1}{2}$.
4. Démontrer que :

$$\cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) + \sin(\frac{2\pi}{5})\sin(\frac{4\pi}{5}) = \cos(\frac{2\pi}{5}) \quad \text{et} \quad \cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) - \sin(\frac{2\pi}{5})\sin(\frac{4\pi}{5}) = \cos(\frac{4\pi}{5}).$$

5. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) = -\frac{1}{4}$.
6. Démontrer que : $$\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos(\frac{4\pi}{5}) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

Exercice 21

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $2\mathbf{i}$, 1 et $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$.

Soit f la fonction, définie sur $\mathbb{C}$, par $f(z) = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} z$. On note T la transformation du plan associée à f.

1. Placer les points A, B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.
2. Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.
3. Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

$$|z - 2\mathbf{i}| = 2.$$

   a) Déterminer et construire Γ. En donner une équation.

   b) Déterminer et construire l'image Γ ' de Γ par la transformation T. (On ne demande pas d'équation)

4. Soit Δ l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

$$|z - 1| = |z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}|$$

   a) Déterminer et construire Δ. En donner une équation.

   b) Déterminer et construire l'image Δ' de Δ par la transformation T. (On ne demande pas d'équation)

Exercice 22

Dans tout ce qui suit, la lettre J représente votre jour de naissance et M votre mois de naissance. Par exemple, si vous êtes nés le 11 Octobre alors $J = 11$ et $M = 10$.

1. Calculer la partie imaginaire du nombre complexe suivant :

$$Z = \frac{1}{M + \mathbf{i}}$$

2. Déterminer un argument du nombre complexe suivant :

$$Z = \left(\frac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{1+\mathbf{i}}\right)^M$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^4 + (2 - J)\, z^2 - (J - 1) = 0$$

Exercice 23

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : (On donnera les solutions sous forme algébrique)

$$(1 - 3\mathbf{i})Z = -2 + 5\mathbf{i} \qquad\qquad Z^2 + Z + 1 = 0$$

Exercice 24

Démontrer que : $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$.

Exercice 25

Pour tout nombre complexe z, on pose : $\qquad P(z) = z^4 - 4z^2 + 16$

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $\qquad P(z) = 0$

1. Déterminer le réel a tel que : $\qquad P(z) = (z^2 + az + 4)(z^2 - az + 4)$
2. Résoudre l'équation (E). On notera z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives.

   Vérifier que les solutions sont z_1, $-z_1$, $\overline{z_1}$, $-\overline{z_1}$. Écrire ces solutions sous forme trigonométrique.

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 4 cm).

   a) Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives z_1, $-\overline{z_1}$, $-z_1$, $\overline{z_1}$.

   b) Montrer que ces points sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 2.

Exercice 26

Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme $a + b\mathbf{i}$: $\dfrac{1}{1+\mathbf{i}}$; $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}}$; $\dfrac{1}{\mathbf{i}}$.

Exercice 27

1. On pose $\mathbf{j} = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$. Calculer $\mathbf{j}^2$.
2. En déduire les relations : $1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2 = 0$; $\mathbf{j}^3 = 1$; $\dfrac{1}{\mathbf{j}} = \mathbf{j}^2 = \overline{\mathbf{j}}$. [$\overline{\mathbf{j}}$ est le conjugué de $\mathbf{j}$]

Exercice 28

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \sqrt{3} - \mathbf{i} \;;\; z_2 = -5\mathbf{i} \;;\; z_3 = -\cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4} \;;\; z_4 = 2\cos\frac{\pi}{6} + 2\,\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{6}$$

Exercice 29

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B et C dont les affixes respectives sont $Z_A = -\mathbf{i}$; $Z_B = 4 + \mathbf{i}$; $Z_C = 2 - 5\mathbf{i}$.

1. Placer les points A, B et C dans le repère.
2. Calculer les affixes respectifs Z_1, Z_2 et Z_3 des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}$.
3. Calculer les modules respectifs de Z_1, Z_2 et Z_3. Que peut-on dire du triangle ABC ?

Exercice 30

Le but de cet exercice est de démontrer les relations bien connues : $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Dans un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ dessiner un cercle trigonométrique (c'est-à-dire de rayon $r = 1$) de centre O. Placer le point $A(1 ; 0)$, le point B tel que l'angle $\left(\vec{u} ; \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, le point H, projeté orthogonal de B sur l'axe des abscisses et le point K, projeté orthogonal de B sur l'axe des ordonnées.
2. Démontrer que le triangle AOB est équilatéral. [On pourra raisonner sur les angles]
3. En déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{3}$, puis celle de $\sin\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 31

Résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{-3\}$ l'équation : $\dfrac{z-2\mathbf{i}}{z+3} = 2 - \mathbf{i}$.

Exercice 32

1. Déterminer le module et un argument de $Z_1 = 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$.
2. Écrire sous forme algébrique, trigonométrique et exponentielle les nombres complexes Z_2 et Z_3 définis par :

$$Z_2 = \mathbf{i}\,Z_1 \qquad \text{et} \qquad Z_3 = \mathbf{i}\,Z_2.$$

3. Dans le plan P muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 2 cm, on place les images M_1, M_2 et M_3 de Z_1, Z_2 et Z_3. Démontrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle isocèle.

Exercice 33

1. On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + \mathbf{i}$; $z_2 = \sqrt{3} + \mathbf{i}$; $Z = z_1^3 z_2$
   a) Mettre z_1^3 sous forme algébrique (on pourra utiliser une identité remarquable)
   b) Mettre Z sous forme algébrique.
2. Passages aux formes trigonométriques
   a) Déterminer le module et un argument de z_1 puis de z_1^3.
   b) Déterminer le module et un argument de z_2.
   c) Déduire des questions précédentes une écriture trigonométrique de Z.
3. En comparant les écritures trigonométrique et algébrique de Z, déterminer les valeurs exactes de :

$$\cos\frac{11\pi}{12} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{11\pi}{12}.$$

Exercice 34

Démontrer que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\cos(pt) = \mathrm{Re}\,\frac{\mathbf{e}^{(n+1)\mathbf{i}t} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}t}}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t} - 1}$ pour tout $t \neq 2k\pi$.

Exercice 35

On donne les nombres complexes suivants : $Z_1 = 4 + 3\mathbf{i}$ et $Z_2 = 5 - 2\mathbf{i}$

1. Écrire le nombre Z_1Z_2 sous la forme $a + b\mathbf{i}$.
2. Écrire le nombre complexe $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ sous la forme $a + b\mathbf{i}$.

Exercice 36

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les trois points A, B et C dont les affixes sont : $Z_A = \sqrt{3} + \mathbf{i}$, $Z_B = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathbf{i}$ et $Z_C = 1 + \sqrt{3}\,\mathbf{i}$.

Démontrer que les points A, B et C sont, tous trois, sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon R.

Exercice 37

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $(Z - 3\mathbf{i})^2 = -16$.

2. Résoudre, dans $\mathbb{C} \setminus \{\mathbf{i}\}$, l'équation : $\dfrac{Z + \mathbf{i}}{Z - \mathbf{i}} = 1 + \mathbf{i}$ (On donnera la ou les solution(s) sous la forme $a + b\mathbf{i}$).

3. Résoudre, dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, le système : $\begin{cases} Z_1 + \mathbf{i}Z_2 = 0 \\ \mathbf{i}Z_1 - 2Z_2 = 1 \end{cases}$.

Exercice 38

Démontrer les identités remarquables suivantes (valables pour tous complexes z_1 et z_2) :

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\,\overline{z_2}) + |z_2|^2$$

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\,\overline{z_2}) + |z_2|^2$$

Exercice 39

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $x^2 - \sqrt{3}\,x + 1 = 0$

(On donnera les solutions sous forme algébrique, trigonométrique puis exponentielle)

2) Démontrer que : $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = (x - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})(x - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta})$.