EXERCICES DE CALCUL VECTORIEL DANS LE PLAN ET L'ESPACE EUCLIDIEN

Exercice 1

On considère, dans l'espace, les points $A(0 ; -1 ; -1)$, $B(6 ; 1 ; 9)$ et $C(1 ; 0 ; 0)$

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P, passant par A et dont un vecteur normal est $\vec{n}(3 ; 1 ; 4)$.
2. Déterminer une équation de la sphère de diamètre $[AB]$. Préciser les coordonnées de son centre Ω et son rayon R.
3. Soit G le barycentre du système $\{(A, 1) ; (B, 1) ; (C, 2)\}$
   a) Déterminer les coordonnées du point G.
   b) Déterminer l'ensemble E des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA}$ soient colinéaires.
   c) Donner une représentation paramétrique de E.

Exercice 2

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace.

On donne les points $A(1 ; 2 ; -3)$, $B(0 ; -1 ; 2)$ et $C(3 ; 1 ; -1)$

1. Déterminer une équation du plan P passant par A, B et C.
2. Déterminer une équation de la sphère S de diamètre $[AB]$.
3. On considère l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 11 = 0$. Cette équation définit-elle une sphère ? Si oui, préciser son centre et son rayon.

Exercice 3

$ABCD$ est un rectangle du plan, de diagonales $[AC]$ et $[DB]$ de longueur a.

1. m est un réel non nul. G_m est le barycentre de $\{(A, m), (B, -1), (C, 1)\}$
   a) Préciser la position de G_1.
   b) Quel est l'ensemble $\mathscr{E}$ des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$?
2. Quel est l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan tel que $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = a$?
3. Quel est l'ensemble $\mathscr{F}'$ des points M du plan tels que le vecteur $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$?
4. Faire une figure et représenter les ensembles $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$.

Exercice 4

$ABCD$ est un carré.

1. Quel est l'ensemble E des points M du plan tels que $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$?
2. Quel est l'ensemble E' des points M du plan tels que les vecteurs $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ soient colinéaires ?
3. Quel est l'ensemble E'' des points M du plan tels que $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$?

Exercice 5

On considère, dans le plan $\wp$, un triangle ABC non aplati. B' désigne le milieu de $[AC]$, C' le milieu de $[AB]$, D le est le barycentre du système $\{(A, 3), (B, 2)\}$ et I le barycentre du système $\{(A, 2), (B, 2), (A, 1), (C, 1)\}$.

1. Montrer que I est le barycentre du système $\{(B', 1), (C', 2)\}$ et également du système $\{(D, 5), (C, 1)\}$
   En déduire que I est le point d'intersection des droites $(B'C')$ et (CD).
2. La droite (AI) coupe la droite (BC) en E. Déterminer la position de E sur la droite (BC).
3. B et C restent fixes. Le point A se déplace dans le plan $\wp$, le segment $[AE]$, où E est le point défini par dans la question 2, conservant une longueur constante. Déterminer les lieux géométriques des point I et D. (On pourra faire apparaître des homothéties).

Exercice 6 *Théorème des trois perpendiculaires*

Soit d une droite contenue dans un plan P. Un point A extérieur à P se projette orthogonalement en B sur P. On note C le projeté orthogonale de B sur d. Démontrer que (AC) et d sont perpendiculaires.

Exercice 7 *Tétraèdre orthocentrique*

Préliminaire : démontrer la relation d'Euler : pour tous points A, B, C et D de l'espace :

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

En déduire que si dans un tétraèdre, deux paires d'arêtes opposées sont orthogonales, alors les deux arêtes restantes sont orthogonales.

Un tétraèdre qui a ses arêtes opposées orthogonales est dit orthocentrique.

Propriété du tétraèdre orthocentrique :

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note A', B', C' et D' les projetés orthogonaux de A, B, C et D sur les faces opposées. (Les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont les hauteurs du tétraèdre)

1. On suppose que $ABCD$ est un tétraèdre orthocentrique.
   a) Démontrer que (CD) est perpendiculaire au plan (ABA'). En déduire que les droites (CD) et (BA') sont perpendiculaires. On notera K leur intersection.
   b) Démontrer, de même que les droites (BC) et (DA') sont perpendiculaires. En déduire que A' est l'orthocentre du triangle BCD.
   c) Démontrer, de même, que B' est l'orthocentre du triangle ACD.
   d) Démontrer que (AB') passe par K. (Utiliser le théorème des trois perpendiculaires)
   En déduire que les droites (AA') et (BB') sont concourantes. (On notera H leur intersection)
   e) Démontrer que les quatre hauteurs du tétraèdre sont concourantes en H.
   (Le point H s'appelle l'orthocentre du tétraèdre)
2. Étude d'une réciproque : on suppose que A' est l'orthocentre du triangle $ABCD$. Démontrer que le tétraèdre $ABCD$ est orthocentrique.

Exercice 8

On considère les deux plans (P) et (Q) dont les équations sont données ci-dessous :

$(P) : -2x + 6y - 2z + 3 = 0$

$(Q) : 3x - 9y + 3z + 6 = 0$

1. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (P) et un vecteur normal $\vec{m}$ au plan (Q).
2. Les plans (P) et (Q) sont-ils parallèles ou non ? (Justifier)
3. Soit $A(1 ; 1 ; 0)$. Le point A est-il dans (P) ? Dans (Q) ? Qu'en déduisez vous sur les plans (P) et (Q) ?

Exercice 9

On considère trois plans (P), (Q) et (R) dont les équations sont données ci-dessous :

$(P) : x + y - z + 1 = 0$

$(Q) : 2x - y + z + 2 = 0$

$(R) : x - 2y - z = 0$

1. Les plans (P) et (Q) sont-ils perpendiculaires ?
2. Les plans (P) et (R) sont-ils perpendiculaires ?
3. Les plans (Q) et (R) sont-ils perpendiculaires ?
4. Déterminer les coordonnées du point A d'intersection des trois plans (P), (Q) et (R).

Exercice 10

Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points suivants :

$A(6 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 6 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 4)$, $D(4 ; 0 ; 0)$, $E(0 ; 4 ; 0)$ et $F(0 ; 0 ; 8)$ représentés ci-dessous.

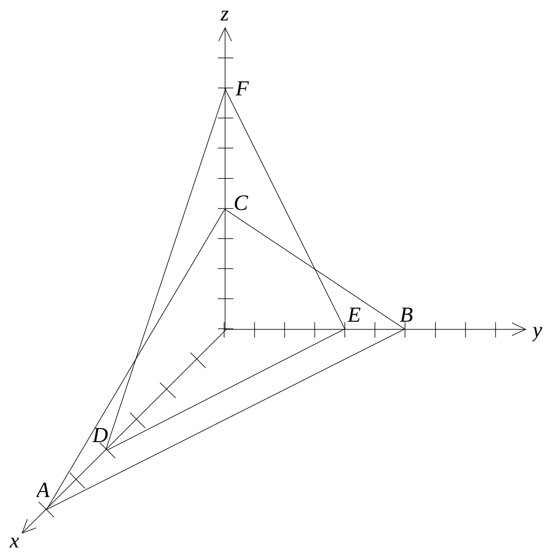
1. Déterminer une équation du plan (ABC) sachant qu'un de ses vecteurs normaux est $\vec{n}\,(2 ; 2 ; 3)$.
2. On veut déterminer une équation du plan (DEF). Mais on ne connaît pas de vecteur normal au plan (DEF). Déterminer des réels a, b et c tels que l'équation :

$$ax + by + cz = 8$$

   soit une équation du plan (DEF).
3. Démontrer que les plans (ABC) et (DEF) sont sécants.
4. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 12 \\ 2x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

   On notera S l'ensemble de tous ses triplets solutions.
5. À quoi correspond géométriquement l'ensemble S ?
6. Les points $I(0 ; 3 ; 2)$ et $J(3 ; 0 ; 2)$ sont-ils des éléments de S ?



Exercice 11

Dans un repère orthonormé direct de l'espace, on considère les points :

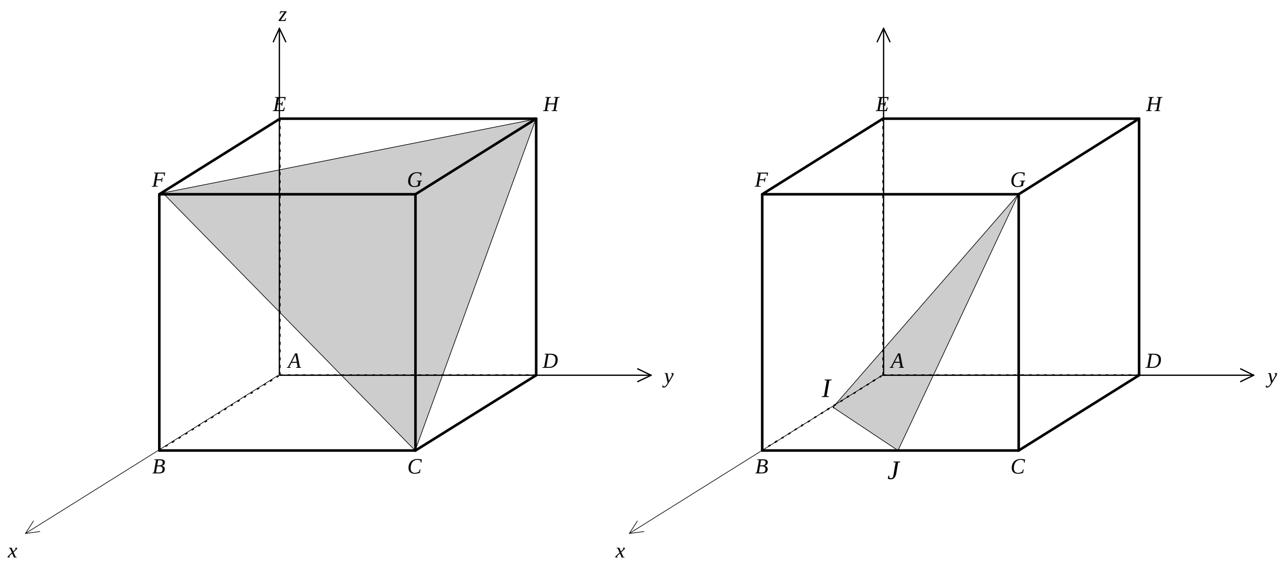
$$A(0\,;0\,;0),\ B(1\,;0\,;0),\ C(1\,;1\,;0),\ D(0\,;1\,;0)$$

$$E(0\,;0\,;1),\ F(1\,;0\,;1),\ G(1\,;1\,;1),\ H(0\,;1\,;1)$$

Ainsi, *ABCDEFGH* est un **cube** de côté 1.

On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$.

Le but principal de l'exercice est d'étudier l'intersection des plans (CFH) et (IJG)



1) Sans justifications, donner les équations des plans $(ABCD)$, $(ABFE)$ et $(ADHE)$.

2) Étude du plan (CFH).

a) Déterminer une équation cartésienne du plan (CFH).

b) En déduire que $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (CFH).

3) Étude du plan (IJG)

a) Déterminer une équation cartésienne du plan (IJG).

b) Le point E appartient-il au plan (IJG) ?

4) Étude de l'intersection des plans (CFH) et (IJG)

a) Résoudre le système $\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 2x-2y+z-1=0 \end{cases}$. On notera S l'ensemble de ses solutions. Que représente S ?

b) Les points $U\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$ et $V\left(1\,;\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ sont-ils des éléments de S ?

c) Représenter l'ensemble S.

Exercice 12

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points :

$$A(0\ ;\ 2\ ;\ 5),\ B(3\ ;\ 0\ ;\ 5) \text{ et } C(3\ ;\ 2\ ;\ 0)$$

1. Placer les points dans le repère. (On dessinera le repère avec des unités au choix)
2. Déterminer une équation du plan (ABC).
3. Déterminer une équation du plan (P) passant par C et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 13

On considère les deux plans (P) et (Q) dont les équations sont données ci-dessous :

$(P) : x + 3y - z + 1 = 0$

$(Q) : 2x + 6y + \alpha z + 5 = 0$

1. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (P) et un vecteur normal $\vec{m}$ au plan (Q).
2. Comment choisir α pour avoir (P) et (Q) perpendiculaires ?
3. Comment choisir α pour avoir (P) et (Q) parallèles ? Les plans (P) et (Q) sont-ils alors confondus ?
4. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 1$. Les plans (P) et (Q) sont donc sécants suivant une droite (D).

   Résoudre le système $\begin{cases} x + 3y - z + 1 = 0 \\ 2x + 6y + z + 5 = 0 \end{cases}$.

   Déterminer deux points A et B de la droite (D). En déduire un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite (D).

Exercice 14

On considère trois plans (P), (Q) et (R) dont les équations sont données ci-dessous :

$(P) : 2x - y + 3z - 1 = 0$

$(Q) : 3x + 2y - z + 2 = 0$

$(R) : x - 3y + 2z - 3 = 0$

On admet que ces trois plans se coupent en unique point A. Déterminer les coordonnées de A.

Exercice 15

Soit (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et (D) une droite de vecteur directeur $\vec{v}$.

1. Dans cette question, on suppose que la droite (D) est parallèle au plan (P). Que vaut $\vec{n} \cdot \vec{v}$? Illustrer.
2. On suppose maintenant que $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$. Que peut-on en déduire sur la position relative de la droite (D) et du plan (P) ? Illustrer.

Exercice 16

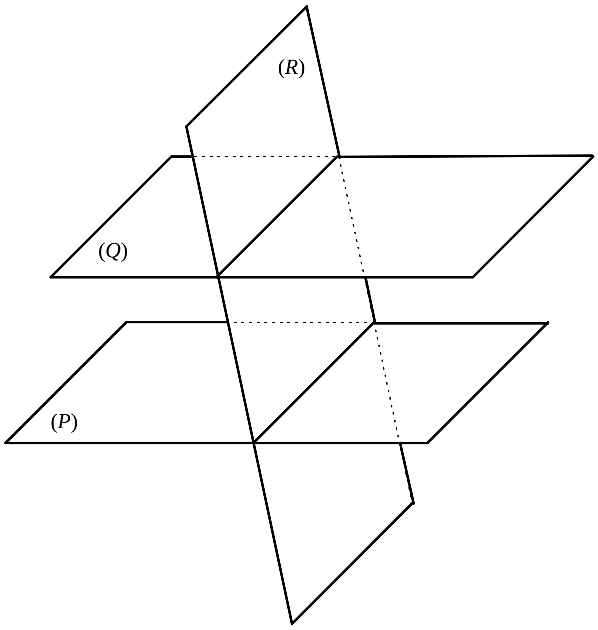
Le but de cet exercice est d'étudier les différentes positions relatives de trois plans dans l'espace.

On note S le système constitué des équations des trois plans (P), (Q) et (R).

Examiner chacune des quatre situations ci-dessous et indiquer (par une brève explication) si le système S admet aucun, un seul ou une infinité de triplet(s) solution(s).

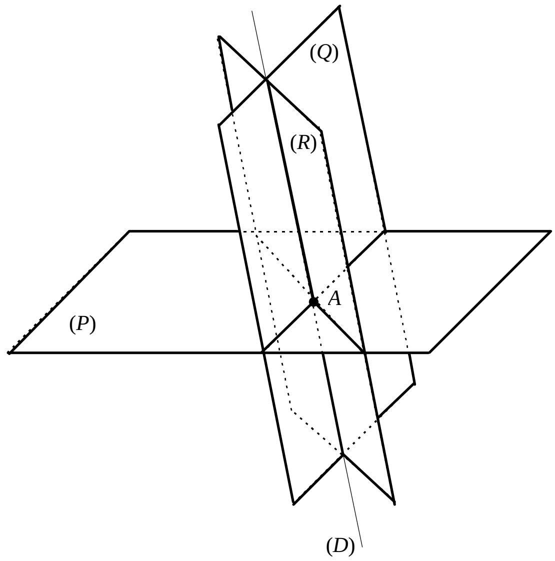
<u>SITUATION A</u>

Plan (R) sécant à deux plans (P) et (Q) strictement parallèles



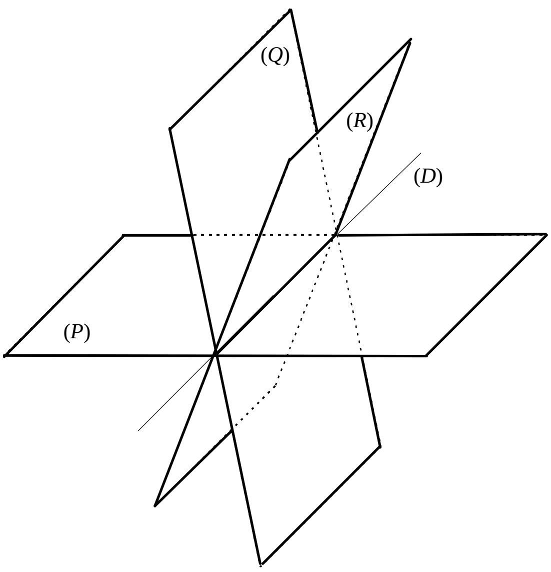
<u>SITUATION B</u> :

Deux plans (Q) et (R) sécants suivant une droite (D) elle-même sécante à un plan (P)



<u>SITUATION C</u>

Trois plans sécants suivant une même droite (D)



<u>SITUATION D</u>

Trois plans sécants deux à deux suivant trois droites strictement parallèles