

Exercice 1

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} \quad (\text{on pourra poser } X = \frac{1}{x})$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes horizontales.
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à C_f en $-\infty$.

Exercice 3

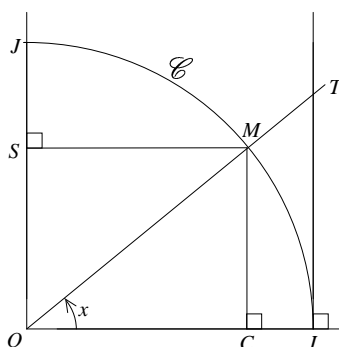
1. Démontrer que, pour tout réel x positif : $\sin x \leq x$
2. Démontrer que, pour tout réel x positif : $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$ (\clubsuit)
3. Justifier que l'inégalité (\clubsuit) est encore valable lorsque x est négatif.
4. Étudier la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

Exercice 4

PARTIE A *Un calcul d'aires*

Soit x un réel de l'intervalle $]0 ; \frac{\pi}{2}[$ et M le point du cercle trigonométrique \mathcal{C} tel que l'angle (\vec{OI}, \vec{OM}) soit de mesure x .

Les éléments géométriques utilisés par la suite sont décrits dans la figure ci-dessous :



1. Exprimer, en fonction de x , les distances OC , OS et IT .
2. Exprimer, en fonction de x , les aires des triangles OIM et OIT .
3. Exprimer, en fonction de x , l'aire du secteur angulaire IOM .
4. Dédire des questions précédentes que $\sin x < x < \tan x$.

PARTIE B *Calculs de limites*

1. Dédurre de la relation de la question A. 4. et de la parité des fonctions intervenant dans l'encadrement que :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de }]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}, \text{ on a : } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

2. En déduire la limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers 0.

3. Vérifier que :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de }]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}, \text{ on a : } \frac{1}{1 + \cos x} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

4. En déduire la limite de $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ puis de $\frac{\cos x - 1}{x}$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 5

Étudier la limite en $+\infty$ de $\sqrt{x^2 + x} - x$.

Donner une interprétation graphique du résultat.

Exercice 6

Étudier la limite en $+\infty$ de $\frac{\cos x}{x^2 + x}$.

Exercice 7

Déterminer l'équation de l'asymptote oblique, en $+\infty$, à la courbe représentative de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{4 - x}$$

Exercice 8

Montrer que la fonction suivante admet un prolongement par continuité en 0 et définir ce prolongement :

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{3x}$$

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier la limite suivante : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin nt}{\sin t}$