

## EXERCICES SUR LES LOGARITHMES ET LES EXPONENTIELLES

---

### Exercice 1

1. Démontrer que : 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = 1$$

[On pourra, par exemple, poser  $X = \frac{1}{x}$ ]

2. En déduire la limite suivante : 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

### Exercice 2

On considère deux fonctions, notées ch et sh, définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Démontrer que  $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$  et que  $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$ .
2. Résoudre, sur  $\mathbb{R}$ , les inéquations  $\operatorname{sh} x \geq 0$  et  $\operatorname{ch} x \geq 0$ .
3. En déduire les tableaux de variations des fonctions ch et sh. (On justifiera soigneusement le calcul des limites en  $-\infty$  et en  $+\infty$ )

### Exercice 3

On considère le polynôme  $P$  défini par :  $P(X) = X^3 + 2X^2 - 5X - 6$ .

1. Factoriser (au maximum) le polynôme  $P$ . (On pourra rechercher une racine évidente)
2. Résoudre l'équation  $e^{3x} + 2e^{2x} - 5e^x = 6$ .
3. Résoudre l'équation  $(\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 - 5\ln x = 6$ .

### Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

1.  $\ln(x+1) = 1$
2.  $\ln[2(1-x)] + \ln[2(1+x)] = \ln 3$
3.  $\ln(x-1) + \ln(x+1) = 0$
4.  $2(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$

### Exercice 5

Simplifier les expressions suivantes : 
$$A = \ln \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) + \ln \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \quad B = \ln \sqrt{e} + \ln \left( \frac{1}{e} \right)$$

### Exercice 6

Après avoir précisé les contraintes, résoudre :

1.  $\ln(3x+1) \leq 0$
2.  $\ln \left( \frac{x+1}{3x-5} \right) \geq 0$
3.  $\ln \left( \frac{2x+1}{x-1} \right) \leq 0$
4.  $(\ln x)^2 - \ln x - 42 = 0$
5.  $\ln(x^2) = (\ln x)^2$
6.  $\ln(5x-3) = 2$
7.  $\ln(2x+1) + \ln(x-3) = \ln(x+5)$
8.  $\ln(3-x) + 1 \geq 0$
9.  $2(\ln x)^2 + 3\ln x - 2 = 0$
10.  $\ln(x+3) \leq 1 + \ln(1-x)$

### Exercice 7

Résoudre (dans  $\mathbb{R}$ ) l'équation :  $5e^{4x} - 13e^{2x} - 6 = 0$ .

[Indication : on pourra poser  $X = e^{2x}$ ]

### Exercice 8

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ .

- 1) Calculer la dérivée  $f'$ . Quel est son signe ?
- 2) En déduire si la fonction  $f$  est croissante ou décroissante sur  $]0 ; +\infty[$ .

### Exercice 9

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -\frac{1}{2} ; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln(2x + 1)$

- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Préciser s'il y a des asymptotes.
- 2) Calculer la dérivée  $f'$ .
- 3) Étudier le signe de  $f'$ .
- 4) Faire le tableau de variations de la fonction  $f$ .

### Exercice 10

Simplifier au maximum l'expression suivante :  $A(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$

### Exercice 11

Résoudre les inéquations suivantes :

- $e^{2x-4} \leq 3$
- $(e^x - 2)(e^x - 3) \geq 0$
- $(e^x + 2)(e^x + 3) < 0$

### Exercice 12

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in ]0 ; +\infty[$  et (E) l'équation :  $\ln x = x^n$

1. Dans cette question,  $n = 1$ . Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$ , par :  $f(x) = x - \ln x$ . En déduire, que dans le cas  $n = 1$ , l'équation (E) n'a aucune solution dans  $]0 ; +\infty[$ .
2. Dans cette question,  $n$  est quelconque. En choisissant la bonne fonction, démontrer, comme ci-dessus, que l'équation (E) n'a aucune solution dans  $]0 ; +\infty[$ , quelque soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Exercice 13

Trouver, mentalement, une solution aux équations suivantes : (sans chercher à les résoudre)

- $\ln x = x - 1$
- $\ln x = \frac{e}{x}$
- $\frac{1}{2}x \ln x = e^3$
- $\ln(\ln x) = \ln \sqrt{x} - \frac{1}{2}$
- $x \ln 2 = 2 \ln x$

### **Exercice 14**

Déterminer tous les couples  $(x ; y)$  de nombres réels qui vérifient simultanément les deux équations :

$$\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2 \ln 6 \\ e^x = \frac{1}{e^{1+y}} \end{cases}$$

### **Exercice 15**

1. Démontrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x} + 1$$

En déduire la valeur de :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln x}$$

2. Étudier la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x \times \ln(1+x)$$

(Indication, lorsque  $x$  non nul, on a :  $\frac{x}{x} = 1 \dots$ )

### **Exercice 16**

Démontrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

### **Exercice 17**

Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $f(t) = t \ln t$ .

En déduire que pour tous  $x$  et  $y$  de  $]\frac{1}{e}, +\infty[ : x \ln x < y \ln y \Rightarrow x < y$

### **Exercice 18**

Démontrer, sans calculatrice, que :  $e \ln 2 < 2$

(On pourra étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $f(x) = x - e \ln x$ )

### **Problème 1** Étude d'une fonction avec un logarithme

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$ .

On note  $C_f$  sa représentation graphique dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Étudier les limites de  $f$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ .
2. Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  puis résoudre l'inéquation  $f'(x) \geq 0$ .
3. En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$ . (On précisera la valeur exacte des éventuels extremums)
4. Tracer la courbe  $C_f$ . (On pourra se placer sur l'intervalle  $]0 ; 2]$ )
5. Préciser, à l'aide d'un calcul, les coordonnées exactes du point d'intersection de  $C_f$  avec l'axe des abscisses.

### **Problème 2** Étude d'une fonction avec une exponentielle

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{x-4}{x} e^x$ .

On note  $C_f$  sa représentation graphique dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Étudier les limites de  $f$  en  $-\infty$ ,  $0^-$ ,  $0^+$  et  $+\infty$ .
2. Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  et préciser son signe.
3. En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$ . (On précisera la valeur exacte des éventuels extremums)
4. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe au point d'abscisse  $x_0 = 2$ .
5. Tracer la courbe  $C_f$ . (On pourra se placer sur l'union  $[-2 ; 0[ \cup ]0 ; 5]$ )

### **Problème 3** Étude de fonctions comportant des logarithmes

1. Étudier le sens de variation de la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :

$$h(x) = x - \ln x$$

En déduire que  $h$  est strictement positive sur  $]0 ; +\infty[$ .

2. On définit sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  la fonction  $f$  par :

$$f(x) = \frac{x}{x - \ln x}$$

- a) Étudier les limites de  $f$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ . En déduire les équations des éventuelles asymptotes.
- b) Étudier le sens de variation de la fonction  $f$ .
- c) Tracer la représentation graphique  $C_f$  de  $f$  dans un repère orthonormé. (Sur  $[0 ; 5]$ )

### **Problème 4**

#### **Partie A** Étude d'un polynôme

On considère la fonction polynôme  $P$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ .

1. Calculer  $P(1)$ .
2. Factoriser, au maximum, le polynôme  $P$ .
3. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $P(x) \geq 0$ .

#### **Partie B** Étude d'une fonction comportant une exponentielle

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \left(x - 2 - \frac{1}{x}\right) e^x$ . On note  $C_f$  sa représentation graphique.

1. Étudier les limites de  $f$  en  $-\infty$ , en  $0^-$ , en  $0^+$  et en  $+\infty$ .  
En déduire que  $C_f$  admet une asymptote verticale et une asymptote horizontale  $\Delta$  en  $-\infty$  dont on précisera les équations.
2. Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$ , puis établir que :  $f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2} e^x$
3. En déduire le tableau de variation de  $f$ .
4. Déterminer, par calcul, les coordonnées des points d'intersection de  $C_f$  avec l'axe des abscisses.
5. Tracer, dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la représentation graphique  $C_f$  de  $f$ . (Sur  $[-3 ; 3]$ )

### **Problème 5**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

On note  $C_f$  sa représentation graphique dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Limites de  $f$

- a) Étudier la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
- b) Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ . En déduire que  $C_f$  admet une asymptote horizontale en  $+\infty$  dont on précisera l'équation.

2. Variations de  $f$

- a) Montrer que la dérivée  $f'$  de  $f$  est définie par :  $f'(x) = (1-x^2)e^{-x}$
- b) Résoudre l'inéquation  $f'(x) \geq 0$ .
- c) En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$ .

3. Représentation graphique

- a) Déterminer une équation de la tangente  $T$  à  $C_f$  au point d'abscisse  $x_0 = 0$ .
- b) Tracer la droite  $T$  puis la courbe  $C_f$ . (On représentera par une double flèche les éventuelles tangentes horizontales)

### **Problème 6**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = (x - e)(\ln x - 1) \text{ et } g(x) = \ln x - \frac{e}{x}$$

1. Dresser le tableau de variation de  $g$ .
2. En déduire que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution dans  $]0; +\infty[$  que l'on précisera.
3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
4. En déduire que  $f$  est positive sur  $]0; +\infty[$ .

### **Problème 7**

#### **PARTIE A**

1. Étudier le sens de variation de la fonction  $h_1$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$h_1(x) = x - \ln x$$

Montrer que pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$  on a :

$$h_1(x) > 0$$

2. On définit sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  la fonction  $f_1$  par :

$$f_1(x) = \frac{x}{x - \ln x}$$

- a) Étudier le sens de variation de la fonction  $f_1$ .
- b) Étudier les limites de  $f_1$  aux bornes de l'intervalle  $]0; +\infty[$  et dresser le tableau des variations de  $f_1$ .

3. On considère la fonction  $\varphi_1$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_1(x) = f_1(x) \text{ pour } x \in ]0; +\infty[ \end{cases}$$

- a) Montrer que  $\varphi_1$  prolonge  $f_1$  par continuité en 0.

- b) Étudier la dérivabilité de  $\varphi_1$  en 0. En donner une interprétation graphique.  
 c) Tracer la représentation graphique  $C_1$  de  $\varphi_1$  dans un repère orthonormé (unité : 4 cm).

## PARTIE B

Dans cette partie,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Étudier le sens de variation de la fonction  $h_n$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :

$$h_n(x) = x^n - \ln x$$

En déduire que pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  on a :

$$h_n(x) > 0$$

2. On définit sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  la fonction  $f_n$  par :

$$f_n(x) = \frac{x}{x^n - \ln x}$$

- a) On définit sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  la fonction  $g_n$  par :

$$g_n(x) = 1 + (1 - n)x^n - \ln x$$

- i) Montrer  $g_n$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .  
 ii) Montrer l'existence d'un unique réel  $a_n$  de  $]0 ; +\infty[$  tel que  $g_n(a_n) = 0$ .  
 iii) Comparer les nombres  $a_n$  et 1. Quelle est la valeur de  $a_2$  ?  
 b) Démontrer que pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  on a :

$$f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{(x^n - \ln x)^2}$$

- c) En déduire le sens de variation de  $f_n$ .  
 d) Étudier les limites de  $f_n$  aux bornes de  $]0 ; +\infty[$  et dresser le tableau des variations de  $f_n$ . (On ne cherchera pas à calculer la valeur de l'extremum).  
 e) Montrer que la fonction  $f_n$  admet un prolongement par continuité  $\varphi_n$  en 0.  
 Étudier la dérivabilité de  $\varphi_n$  en 0. En donner une interprétation graphique.  
 f) Préciser la valeur de  $f_2(a_2)$ , puis tracer la représentation graphique  $C_2$  de  $\varphi_2$  dans un repère orthonormé (unité : 4 cm)

## Problème 8

Question préliminaire : étudier la limite suivante :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{e^x}{x}$

Soit  $f$  la fonction définie sur  $E = ]-\infty ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[$  par  $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$ .

1. Étudier les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. Donner une interprétation graphique.  
 2. Étudier les variations de  $f$  sur  $E$ . Dresser le tableau de variations de  $f$ .  
 3. On considère la fonction  $\bar{f}$  prolongeant  $f$  en 1 à gauche par continuité :

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Étudier la dérivabilité à gauche de  $\bar{f}$  en 1. [On pourra poser  $X = x - 1$  et utiliser la question préliminaire]

4. S'il reste quelques minutes, tracer la représentation graphique de  $\bar{f}$  avec ses éléments connexes (asymptotes et tangentes horizontales éventuelles).

### **Problème 9**

#### **PARTIE A** *Étude d'une fonction auxiliaire*

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par : 
$$g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$$

On note  $C_g$  la courbe représentative de  $g$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. Déterminer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ . Que peut-on en déduire pour  $C_g$  ?
2. Déterminer, à l'aide de la dérivée  $g'$ , le sens de variation de  $g$ . Dresser le tableau de variation de  $g$ .
3. Résoudre dans  $]0 ; +\infty[$  l'équation  $g(x) = e$ .
4. Calculer  $g\left(\frac{1}{e}\right)$ . En déduire, pour tout  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$ , le signe de  $g(x)$ .
5. Tracer  $C_g$  en indiquant les asymptotes et tangentes horizontales éventuelles. Faire apparaître sur le graphique le résultat de la question 3.

#### **PARTIE B** *Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative*

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par : 
$$f(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + ex - e.$$

On note  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

(Unités graphiques : 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

1. Soit  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$ . Vérifier que  $f'(x) = g(x)$ .
2. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
3. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
4. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $C_f$  en son point  $I$  d'abscisse 1. Préciser la position de  $C_f$  par rapport à  $(T)$ .
5. Tracer  $(T)$  et  $C_f$ .

### **Problème 10**

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  pour  $x \in ]0 ; +\infty[$ .

On note  $(C_f)$  sa représentation graphique.

1. En écrivant  $f(x) = \frac{1}{x} \times \ln x$ , étudier la limite de  $f$  en  $0^+$ . La courbe  $(C_f)$  admet-elle une asymptote verticale ?  
Si oui, préciser son équation.
2. Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ . La courbe  $(C_f)$  admet-elle une asymptote horizontale en  $+\infty$  ?  
Si oui, préciser son équation.
3. Démontrer que  $f'(x) = \frac{1}{x^2} (1 - \ln x)$ .
4. Résoudre l'inéquation  $1 - \ln x \geq 0$ .

- En déduire que :  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e$ .
- Dresser le tableau de variations de  $f$ . Préciser le maximum de la fonction  $f$ .
- Tracer, sur une feuille séparée, la courbe  $C_f$ .

### **Problème 11**

#### *PARTIE A Étude d'une fonction $g$*

On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = x \ln x - x + 1$ , pour  $x \in ]0, +\infty[$ .

- Calculer  $g(1)$  et  $g(e)$ .
- Étudier la limite de  $g$  lorsque  $x$  tend vers 0.
- Étudier la limite de  $g$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- Calculer la dérivée  $g'$  de  $g$ . En déduire le tableau de variations de  $g$ . (On précisera la valeur des éventuels extremums).
- Justifier que  $g$  est positive sur  $]0, +\infty[$ .
- Tracer soigneusement la courbe  $C_g$  de la fonction  $g$ .

#### *PARTIE B Détermination d'une primitive*

On considère la fonction  $f$  définie pour  $x \in ]0, +\infty[$  par :  $f(x) = 1 + \ln x$

En vous aidant des résultats de la partie A, déterminer la primitive  $F$  de la fonction  $f$  vérifiant  $F(e) = e$ .

### **Problème 12**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^x - x - 2$ . On note  $C_f$  sa représentation graphique dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Étudier la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- Étudier la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .
- Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  puis étudier le signe de  $f'$ . En déduire le tableau de variations de  $f$ .
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 2)]$ . En déduire que  $C_f$  admet une asymptote oblique  $\Delta$  en  $-\infty$  dont on précisera l'équation. Quelle est la position de  $C_f$  par rapport à  $\Delta$  ?
- Déterminer l'équation de la tangente  $T$  à  $C_f$  au point d'abscisse 1.

### **Problème 13**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$f(x) = (x + 1) \ln x$$

On note  $C_f$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

#### **PARTIE A Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$$

- Étudier les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .
- Calculer  $g'(x)$  puis établir le tableau de variation de  $g$ .
- En déduire que, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $g(x) > 0$ .

## **PARTIE B Étude de la fonction $f$**

1. Étudier les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ . Préciser les éventuelles asymptotes.
2. Calculer  $f'(x)$  puis établir le tableau de variation de  $f$  (On pourra utiliser le résultat de la question A.3.)
3. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à  $C_f$  au point  $A$  d'abscisse 1.
4. Tracer très soigneusement  $T$  et  $C_f$ .

### **Problème 14**

Les questions 1) à 7) sont indépendantes

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$

On note  $C_f$  sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Expliquer pourquoi la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ .
- 2) Déterminer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ .

En déduire que  $C_f$  admet une asymptote verticale dont on précisera l'équation.

- 3) Déterminer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- 4) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 2)]$$

En déduire que  $C_f$  admet une asymptote oblique  $\Delta^+$  en  $+\infty$  et une asymptote oblique  $\Delta^-$  en  $-\infty$  dont on précisera les équations.

- 5) Montrer que la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  est définie par :

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^*.$$

- 6) Résoudre l'inéquation :  $2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$ .
- 7) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
- 8) Tracer les droites  $\Delta^+$ ,  $\Delta^-$  puis la courbe  $C_f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### **Problème 15**

#### **Partie A Étude d'une fonction "simple"**

Soit  $u$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $u(x) = \frac{1 - x^2}{2}$ .

- 1) Étudier les limites de  $u$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- 2) Calculer  $u'(x)$ .

#### **Partie B Étude d'une fonction comportant une exponentielle**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{\frac{1-x^2}{2}}$ .

- 1) Étudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . Préciser les éventuelles asymptotes horizontales.
- 2) Calculer  $f'(x)$ . En déduire le tableau de variations (complet) de  $f$ .
- 3) Tracer (soigneusement) la courbe  $C_f$  représentant  $f$  dans un repère orthonormal. (Unités : 4 cm)
- 4) Soit  $A$  le point de  $C_f$  d'abscisse  $x_0 = 1$ . Calculer l'ordonnée de  $A$ .
- 5) Déterminer une équation de la tangente  $\Delta$  à  $C_f$  en  $A$ . Tracer  $\Delta$  dans le repère.

### **Problème 16**

Le but du problème est l'étude d'une fonction et le tracé de sa représentation graphique.

- 1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = -1 + (1-x)e^{-x}$ .
  - a) Calculer  $g'(x)$ . Étudier son signe.
  - b) Démontrer que la limite de  $g$  en  $+\infty$  est égale à  $-1$ .
  - c) Dresser le tableau de variation de la fonction  $g$ . (On précisera  $g(0)$ )
  - d) Démontrer que pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$  on a :  $g(x) \leq 0$ .
- 2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = xe^{-x} - x + 4$ .

Soit  $C_f$  sa représentation graphique dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (Unité : 2cm)

  - a) Vérifier que, pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$ , on a :  $f'(x) = g(x)$ .
  - b) Étudier les variations de  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$ . Préciser la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - c) Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = -x + 4$  est asymptote à  $C_f$ . Étudier la position de  $C_f$  par rapport à  $\Delta$ .
  - d) Construire la courbe  $C_f$  et préciser la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.
- 3) Soit  $h$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :  $h(x) = -\frac{x}{2} + 4$ .
  - a) Tracer sa représentation graphique  $D$  dans le même repère que  $C_f$ .
  - b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de  $C_f$  et  $D$ .
- 4) Démontrer que l'équation  $f(x) = 2$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[2 ; 3]$ . Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

### **Problème 17**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x - 2x$

- 1) Démontrer que la limite de  $f$  en 0 est égale à  $-\infty$ .
- 2) Démontrer que : 
$$f(x) = x(\ln x - 2) + \frac{\ln x}{x}$$

En déduire que la limite de  $f$  en  $+\infty$  est égale à  $+\infty$ .
- 3) Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$ . Démontrer que l'on a :

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)(\ln x - 1)}{x^2}$$

- 4) En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$ .
- 5) Tracer la courbe  $C_f$  représentant  $f$  dans un repère orthonormé.

(On se limitera à l'intervalle  $]0 ; 10]$ . Unités graphiques : 2 cm)

### **Problème 18**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \left(x + \frac{4}{x}\right) \ln x + \frac{8}{x}$ .

On note  $C_f$  sa représentation graphique dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Démontrer que la limite de  $f$  en  $+\infty$  est égale à  $+\infty$ .

La courbe  $C_f$  admet-elle une asymptote horizontale en  $+\infty$  ? Si oui, préciser son équation.
- 2) Démontrer que, pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ , on a :

$$f(x) = x \ln x + \frac{4 \ln x + 8}{x}$$

En déduire que la limite de  $f$  en 0 est égale à  $-\infty$ .

La courbe  $C_f$  admet-elle une asymptote verticale ? Si oui, préciser son équation.

3) Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$ .

Démontrer que, pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ , on a :

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 4)(\ln x + 1)}{x^2}$$

4) En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$ . (Préciser les valeurs exactes des éventuels extremums)

5) Déterminer une équation de la tangente  $T$  à  $C_f$  en son point d'abscisse  $x_0 = 1$ .

6) Tracer la tangente  $T$  et la courbe  $C_f$ .

(On se limitera à l'intervalle  $]0 ; 5]$ . Unités graphiques : 2 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée)

7) Résoudre l'équation :  $f(x) = x \ln x$ .

## **Problème 19**

### **Partie A**

On considère une fonction  $f$  définie, sur  $\mathbb{R}$ , par :  $f(x) = (ax^2 + bx + c) e^{-x}$  ( $a, b$  et  $c$  sont des réels)

On note  $C$  sa représentation graphique dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On sait que la courbe  $C$  passe par le point  $A(0 ; 1)$  et qu'elle admet une tangente parallèle à  $(Ox)$  au point d'abscisse 1. On sait aussi que  $f'(0) = -6$ .

1. Exprimer, en fonction de  $a, b$  et  $c$  la dérivée  $f'$  de  $f$ .
2. Déterminer les coefficients  $a, b$  et  $c$ .

### **Partie B**

On considère la fonction  $f$  définie, sur  $\mathbb{R}$ , par :  $f(x) = (x^2 - 5x + 1) e^{-x}$

On note  $C$  sa représentation graphique dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Calculer  $f(0)$ .
2. Étudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement.
3. Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  puis la factoriser.
4. En déduire le tableau de variation (complet) de la fonction  $f$ .
5. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à  $C$  au point d'abscisse 0.

## **Problème 20**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln(2^x) - \ln(x^2)$

1. Démontrer que :  $f(x) = x \ln 2 - 2 \ln x$
2. Calculer  $f(2)$  et  $f(4)$ .
3. Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$ . En déduire le tableau de variations de  $f$ .
4. À l'aide des questions 2 et 3, préciser le signe de  $f$ .
5. Déterminer l'ensemble des entiers  $n$  pour lesquels on a :  $2^n \geq n^2$ .